

Biotempo (Lima)

<https://revistas.urp.edu.pe/index.php/Biotempo>



ORIGINAL ARTICLE / ARTÍCULO ORIGINAL

## APPLICATION OF BESSEL'S DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTIONS $J_p(x)$ IN FOOD ENGINEERING

## APLICACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BESSEL $J_p(x)$ , EN LA INGENIERÍA DE LOS ALIMENTOS

Olegario Marín-Machuca<sup>1,2,\*</sup>; José Iannacone<sup>3,4</sup>; Fredy Aníbal Alvarado-Zambrano<sup>5</sup>; Ricardo Arnaldo Alvarado-Zambrano<sup>6</sup>; Alcides Castillo-Peña<sup>7</sup> & José Manuel Santamaría-Ballena<sup>8</sup>

- <sup>1</sup> Laboratorio de Tecnología de Alimentos. Facultad de Oceanografía, Pesquería, Ciencias Alimentarias y Acuicultura. Universidad Nacional Federico Villarreal (UNFV), Lima, Perú.
  - <sup>2</sup> Escuela Profesional de Ingeniería de Alimentos. Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos Universidad Nacional del Callao (UNAC), Callao, Perú.
  - <sup>3</sup> Laboratorio de Parasitología. Facultad de Ciencias Biológicas. Universidad Ricardo Palma (URP), Lima, Perú.
  - <sup>4</sup> Laboratorio de Ecología y Biodiversidad Animal. Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. Grupo de Investigación en Sostenibilidad Ambiental (GISA), Escuela Universitaria de Posgrado, Universidad Nacional Federico Villarreal (EUPG-UNFV), Lima, Perú.
  - <sup>5</sup> Laboratorio de Análisis Sensorial de Alimentos. Facultad de Ingeniería de Industrias Alimentarias. Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo (UNASAM), Ancash, Perú.
  - <sup>6</sup> Facultad de Industrias Alimentarias. Universidad Nacional Agraria de la Selva (UNAS), Huánuco, Perú.
  - <sup>7</sup> Laboratorio de Físicoquímica, Escuela Profesional de Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería de Procesos. Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco (UNAAC).
  - <sup>8</sup> Laboratorio de Tecnología de Alimentos. Facultad de Oceanografía, Pesquería, Ciencias Alimentarias y Acuicultura. Universidad Nacional Federico Villarreal (UNFV), Lima, Perú.
- \* Corresponding author: [omarin@unfv.edu.pe](mailto:omarin@unfv.edu.pe)

### ABSTRACT

The Bessel expression is an ordinary differential equation of second order (EDOPO), whose solutions are spherical and can be solved by Frobenius' methods, indeterminate series, and coefficients; whose values can be used very well and easily in food engineering and technology. Their solutions are specified in four parts, of which those of the type are those that have an application in the present study. The Bessel EDOPO was solved in its four possibilities, in which the values and behaviors are given in tables and graphs in detail. The corresponding values were used in the temperature distribution for cylindrical containers of known dimensions using the equations of heat transfer by conduction, preferably, coming from the Fourier theory, facilitating the improvement, modification, and design of new processes. The results of the temperature distribution were calculated by the respective equations and the results obtained were satisfactorily used in the development of the work.

**Keywords:** Bessel differential equation – values of  $J_n(x)$  – temperature distribution in cylindrical containers – solids – sterilization

## RESUMEN

La expresión de Bessel es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (EDOPO), cuyas soluciones son esféricas y pueden resolverse por los métodos de Frobenius, series y coeficientes indeterminados; cuyos valores se pueden utilizar muy bien y con facilidad en la ingeniería y tecnología de los alimentos. Sus soluciones se particularizan en cuatro partes, de las cuales las del tipo  $J_n(x)$  son las que tienen una aplicación en el presente estudio. La EDOPO de Bessel fue resuelta en sus cuatro posibilidades, donde los valores y comportamientos se proporcionan en tablas y gráficas en detalle. Los valores correspondientes de  $J_n(x)$  se usaron en la distribución de temperatura para envases cilíndricos de dimensiones conocidas usando las ecuaciones de transferencia de calor por conducción, preferentemente, proveniente de la teoría de Fourier; facilitando mejorar, modificar y diseñar nuevos procesos. Los resultados de la distribución de temperatura fueron calculados por las ecuaciones respectivas y los resultados obtenidos fueron empleados satisfactoriamente en el desarrollo del trabajo.

**Palabras clave:** Ecuación diferencial de Bessel – esterilización de alimentos sólidos – distribución de temperatura en envases cilíndricos – valores de  $J_n(x)$

## INTRODUCCIÓN

Según Kreyszig (2016), Friedrich Wilhelm Bessel, nació en Minden en el año 1746 y murió en Königsberg en el año 1846. Fue un eminente astrónomo alemán, que se inició como aprendiz en una empresa comercial, estudiando astronomía por su cuenta en su tiempo libre. Más adelante llegó a ser asistente de un observatorio particular y finalmente director del nuevo observatorio de Königsberg, cuyos ensayos sobre las funciones de Bessel (fechado en 1824) se publicaron en 1826.

La transferencia de calor en estado no estacionario nos permite predecir las velocidades de enfriamiento y calentamiento de productos de diferentes tipos de geometrías, con objeto de estimar el tiempo requerido para alcanzar ciertas temperaturas deseadas en la ingeniería de procesamiento de los alimentos; dando lugar a que para la transferencia de calor se requiere la conductividad térmica del mismo, en virtud que el desconocimiento de esta importante propiedad térmica conlleva a un ineficiente control de proceso (Huamán & Ancco, 2018; Ding *et al.*, 2021; Welch *et al.*, 2021).

Las funciones de Bessel son de primera especie y orden  $n$ , de segunda especie y orden  $n$ , funciones modificadas de Bessel de primera especie y orden  $n$ , y funciones modificadas de Bessel de segunda especie y orden  $n$ . Además, se sostiene que los diversos problemas de la ciencia, ingeniería, física y múltiples aplicaciones de la matemática requieren de soluciones verdaderas y semejantes a la ecuación diferencial de Bessel (Murray,

2018; Cruz & Ševčovič, 2020; Dehestani *et al.*, 2020; Izadi & Cattani, 2020), cuya forma es:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad p \geq 0 \dots (1)$$

Las soluciones de la anterior ecuación se llaman funciones de Bessel de orden  $n$ . Se llaman funciones de Bessel a las soluciones de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, en su forma estándar:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0 \quad p \geq 0 \dots (2)$$

Esta ecuación es aplicable en numerosos problemas de las matemáticas, de astronomía, física, ingeniería de los procesos, ingeniería mecánica y en electrónica principalmente. Su aplicación en matemática, de la ecuación de Bessel, es para resolver la ecuación diferencial de Legendre y de Laguerre; en física, en la Teoría de las super cuerdas y deformación de materiales; en la ingeniería de los procesos, para evaluar la transferencia de calor y masa y, en la difusión molecular de partículas; por citar algunos ejemplos.

Las técnicas de procesamiento térmico son ampliamente utilizadas para mejorar la calidad y seguridad de los alimentos y a su vez extender la vida útil de los alimentos; complementando a su vez que el proceso térmico al que son sometidos los alimentos se compone de dos operaciones elementales: el calentamiento y el enfriamiento (Arboleda *et al.*, 2016).

Las ecuaciones diferenciales de Bessel se aplican en problemas sobre oscilaciones, campos eléctricos, conducción de calor, dinámica de fluidos, etc., en la mayoría de los casos cuando el problema muestra simetría cilíndrica; así como también menciona que uno de los métodos más empleados para resolver la ecuación diferencial de Bessel es el de Frobenius (Murray, 2018), al sustituir una serie de la forma:

$$y_{(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \quad (a_0 \neq 0) \dots (3)$$

La ecuación diferencial de Bessel se puede determinar mediante cálculos operacionales analíticos, los cuales se pueden representar gráficamente, indicando de esta manera el comportamiento de dichas funciones (Marín, 2007).

Es de gran importancia contar con un diseño correcto del proceso térmico, ya que esto permite controlar las pérdidas

de humedad, definir las características organolépticas deseadas, garantizar la seguridad del producto y tener un procesos con un rendimiento adecuado para la comercialización del mismo; en virtud que el proceso de calentamiento le imprime al producto atributos especiales como mejor sabor, potabilidad, textura, extensión de la durabilidad y modificaciones favorables del color (Thippareddi & Sánchez, 2016).

Los diversos problemas de la ciencia, ingeniería, física y múltiples aplicaciones de la matemática, a diferentes campos del saber humano, requieren de soluciones similares o semejantes a la ecuación diferencial de Bessel (Abramowitz, 2013) cuya forma es:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) = 0 \quad n \geq 0 \dots (4)$$

Las soluciones de la anterior ecuación se llaman funciones de Bessel de orden  $n$ . Según Kreyszig (2016) formula las soluciones de la ecuación de Bessel de la siguiente forma:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(n+k+1)} \dots (5)$$

Según Simmons (2018), plantea las fórmulas de recurrencia de las funciones de Bessel, que se listan a continuación:

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) \quad \dots (6)$$

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} \{ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \} \quad \dots (7)$$

$$xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \quad \dots (8)$$

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n-1}(x) \quad \dots (9)$$

$$\frac{d}{dx} \{ x^n J_n(x) \} = x^n J_{n-1}(x) \quad \dots (10)$$

$$\frac{d}{dx} \{ x^{-n} J_n(x) \} = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad \dots (11)$$

Las funciones de Bessel  $Y_n(x)$  satisfacen idénticas relaciones; donde las dificultades de dicha ecuación diferencial, radican en que tiene variantes de dificultad mayor e inclusive, presenta, tres modificaciones en su solución, las mismas que se mencionan (Spiegel, 2011).

1. La función de Bessel de primera clase,  $J_n(x)$ , de orden  $n$  se define como:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \dots (12)$$

$$J_0(x) = 1 = \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \dots \dots (13)$$

2. Función de Bessel de Segunda Clase,  $Y_n(x)$ , de orden  $n$  se define como:

$$y_n(x) = \begin{cases} \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\operatorname{sen}(n\pi)}; & n \neq 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(p\pi)}; & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \dots (14)$$

3. La función modificada de Bessel de primera clase y orden  $n$ ,  $I_n(x)$ , se define como:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{r(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!r(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!r(n+3)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+6}}{3!r(n+4)} + \dots \quad (15)$$

4. La función modificada de Bessel de segunda clase de orden,  $K_n(x)$ , se define como:

$$k_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\operatorname{senn}\pi} \right] & n \neq 0,1,2,3,\dots \\ \lim \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\operatorname{senn}\pi} \right] & n = 0,1,2,3,\dots \end{cases} \quad \dots \quad (16)$$

El objetivo del presente estudio fue aplicar las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel en los perfiles de distribución de temperatura durante los procesos de calentamiento de alimentos envasados herméticamente y de forma cilíndrica; así como determinar el comportamiento de las soluciones de la misma ecuación y representarlos gráficamente.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Materiales

La información recolectada fue en base a bibliotecas especializadas y consultas a especialistas en el área de matemática aplicadas y modelamiento matemático experimental en procesos. En seguida el método a emplear fue el método deductivo y demostrativo, considerando las teorías y fundamentos matemáticos necesarios que conduzcan a la solución de la ecuación de Bessel. Para realizar la parte analítica, fue necesario hacerlo por los fundamentos analíticos de la derivada y los infinitesimales si fuese necesario.

Para realizar el comportamiento de las funciones de Bessel de la forma  $J_p(x)$ , así como de su velocidad y aceleración fue necesario recurrir a algún programa computacional o software que grafique las funciones de Bessel y sus derivadas para observar sus respectivos comportamientos. Se consideró la ecuación diferencial de Friedrich Wilhelm Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad p \geq 0 \dots (1)$$

y el método de solución adecuada para determinar las funciones respectivas.

### Instrumentos, equipos y accesorios

Se usó un equipo computacional y/o informático convencional, siendo necesario el uso de un software de simulación e interpretación de datos, tales como el ESTHATGRAFIC y MAPLE 12, los que nos brindaron las gráficas, representación y comportamiento de las funciones de Bessel.

### Protocolo

En cuanto a las bases del diseño, esta se fundamentó en ciencias básicas e intermedias, como la matemática aplicada a la ingeniería de los procesos alimentarios, física e inclusive a la matemática misma. La investigación se basó en el desarrollo adecuado y satisfactorio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, las cuales brindan y ofrecen una valiosa ayuda para estimar cálculos en la ingeniería de los procesos alimentarios (Jenson & Jeffreys, 2015).

Con respecto a las características y especificaciones del producto a obtener, las funciones de Bessel sirvieron para predecir y analizar el comportamiento de los fenómenos naturales de problemas prácticos del ámbito del saber humano, la transferencia de calor y el flujo de fluidos; enfatizando que las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden facilitaron de manera decisiva en el balance materia y de transferencia de calor en los procesos de calentamiento de los alimentos enlatados (Himmelblau, 2011). Así mismo, las funciones de Bessel y sus respectivas derivadas se presentaron en forma de tablas y/o relación de funciones esféricas. El comportamiento de las funciones de Bessel y su aplicación en la ingeniería de los alimentos fue realizado de acuerdo con la transferencia de calor por conducción, según la ley de Fourier y, los datos obtenidos se aplicaron para envases cilíndricos que

contiene cierto alimento envasado, es decir una conserva, cuyas dimensiones de envases pueden ser (307x113), (408x502) y otras dimensiones (Welty, 2018).

La distribución de temperatura para una placa infinita estuvo conformada por una serie de términos de funciones senoidales y cosenoidales (siendo no necesarios soluciones de la ecuación de Bessel) y, que la distribución de temperatura para un cilindro finito está dada por una serie de términos de las soluciones de la ecuación de Bessel (Himmelblau & Bischoff, 2017; Sepúlveda & Barboza-Cánovas, 2017), siendo necesario las soluciones de la ecuación de Bessel. La transferencia de calor por conducción es un proceso complejo, difícil y de gran versatilidad que, para su cuantificación, descripción y entendimiento se tiene que tomar datos de procesos bien definidos desde un punto de vista la transferencia de calor y masa, así como, se debe acotar las temperaturas de

trabajo, entre el ambiente y la de esterilización (mayor de 100 °C); así como que el calentamiento posee funciones importantes entre las que se encuentran el desarrollo de sabor y la estructura del alimento (Manrique, 2017; Bakalis, 2019).

**Aspectos éticos:** Los autores señalan que se cumplieron todos los aspectos éticos a nivel nacional e internacional.

## RESULTADOS

A continuación se presentan los valores de la función de Bessel  $J_n(x)$ ,  $Y_n(x)$ ,  $I_n(x)$  y  $K_n(x)$  (tablas 1 al 4), calculadas por sus respectivas ecuaciones. Los valores correspondientes a cada una de las funciones fueron graficados (figuras 1 a la 4); respectivamente. Los valores de  $J_n(x)$  fueron utilizados para el estudio.

**Tabla 1.** Valores de la función de Bessel:  $J_n(x)$ .

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
0,0	100,0000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,5	0,93846981	0,24226846	0,03060402	0,00256373	0,00016074	(-6)8,05363
1,0	0,76519769	0,44005059	0,11490348	0,01956340	0,00247660	0,00024476
1,5	0,51182767	0,55793651	0,23208767	0,06096400	0,01176810	(-3)1,79942
2,0	0,22389078	0,57672481	0,35283403	0,12894300	(-2)3,39960	(-3)7,0396
2,5	-0,04838378	0,49709410	0,44605906	0,21660000	(-2)73782	(-2)1,95016
3,0	-0,26005195	0,33905896	0,48609126	0,30906300	0,13203000	(-2)4,3028
3,5	-0,38012774	0,13737753	0,45862918	0,38677000	0,20440500	(-2)8,0442
4,0	-0,39714981	-0,06604333	0,36412815	0,43017100	0,28113010	0,13209011
4,5	-0,32054251	-0,23106043	0,21784898	0,42470400	0,34842300	0,19471500
5,0	-0,17759677	-0,32757914	0,04656512	0,36483100	0,39123010	0,26114000
5,5	-0,00684387	-0,34143821	-0,11731548	0,25611800	0,39671700	0,32092500
6,0	0,15064526	-0,27668386	-0,24287321	0,11476800	0,35764000	0,36209001
6,5	0,26009461	-0,15384130	-0,30743039	-0,03534660	0,27480300	0,37356500
7,0	0,30007927	-0,00468282	-0,30141722	-0,16755600	0,15780000	0,74790010
7,5	0,26633966	0,13524843	-0,23027341	-0,25806100	0,02382470	0,28347400
8,0	0,17165081	0,23463635	-0,11299172	-0,29113200	-0,10536000	0,18577001
8,5	0,04193925	0,27312196	0,02232474	-0,26261600	-0,20770100	0,0613300
9,0	-0,09033361	0,24531179	0,14484734	-0,18093500	-0,26547000	-0,05504010
9,5	-0,19392875	0,16126443	0,22787915	-0,06531530	-0,26913100	-0,16132100
10,0	-0,24593576	0,04347275	0,25463031	0,05837940	-0,21960000	-0,23406001
11	-0,17119030	-0,17678530	0,13904752	0,22734800	-0,01504001	-0,23829001
12	0,04768931	-0,22344710	-0,08493049	0,19513700	0,18250001	-0,07347000
13	0,20692610	-0,07031805	-0,21774426	0,00331982	0,21928002	0,13162002
14	0,17107348	0,13337515	-0,15201988	-0,17680900	0,07624001	0,22038000
15	-0,01422447	0,20510404	0,04157168	-0,19401800	-0,11918001	0,13046001
50	0,05581233	-0,09751183	-0,05971280	0,09273480	0,07084098	-0,08140025
100	0,01998585	-0,07714535	-0,02152876	0,07628420	0,02610581	-0,07419574

**Tabla 2.** Valores de la función de Bessel:  $Y_n(x)$ .

X	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$Y_2(x)$	$Y_3(x)$	$Y_4(x)$	$Y_5(x)$	$Y_6(x)$
0,0	-¥	-¥	-¥	-¥	-¥	-¥	-¥
0,5	-0,444519	-1,471472	-5,441371	(-1)-4,2060	(2)-4,99273	(3)-7,9463	(5)-1,58427
1,0	0,088257	-0,781213	-1,650683	-5,821520	(1)-3,32784	(-2)-2,60406	(3)-2,57078
1,5	0,382449	-0,412309	-0,932194	-2,073540	-7,361970	-37,1903	(2)-2,40573
2,0	0,510376	-0,107032	-0,617408	-1,127780	-2,765940	-9,93599	(1)-1,38875
2,5	0,498070	0,145918	-0,381336	-0,756055	-1,43320	-3,83018	(1)-1,38875
3,0	0,376850	0,324674	-0,160400	-0,538542	-0,916683	-1,90595	-5,43647
3,5	0,1189022	0,410188	0,045371	-0,358335	-0,659661	-1,14946	-2,62451
4,0	-0,016941	0,397926	0,215304	-0,182022	-0,488937	-0,795851	-1,50069
4,5	-0,194705	0,300997	0,328482	(-2)-9,0137	-0,340500	-0,596319	-0,984654
5,0	-0,308518	0,1447863	0,367663	0,146267	-0,0192142	-0,453695	-0,715247
5,5	-0,339481	-0,023758	0,33081	0,264370	-0,0424375	-0,326097	-0,550467
6,0	-0,288195	-0,175010	0,229858	0,328249	0,098391	-0,197061	-0,426824
6,5	-0,173242	-0,274091	0,088907	0,328803	0,214604	-0,064675	-0,314104
7,0	-0,025950	-0,302667	-0,060527	0,268081	0,290310	0,063702	-0,199307
7,5	0,117313	-0,259129	-0,186414	0,159708	0,314180	0,175418	-0,08029
8,0	0,223521	-0,158060	-0,263037	0,026542	0,282943	0,256401	0,037558
8,5	0,270205	-0,026169	-0,276362	-0,103884	0,203032	0,294974	0,143995
9,0	0,249937	0,104315	-0,226756	-0,205095	0,090026	0,285118	0,226772
9,5	0,171211	0,203180	-0,128436	-0,257258	-0,034043	0,228590	0,274664
10,0	0,055671	0,249015	-0,005868	-0,251363	-0,144950	0,135403	0,280353
11	-0,168847	0,163706	0,198612	-0,091483	-0,248512	-0,089253	0,167373
12	-0,225237	0,057099	0,215721	0,129006	-0,151218	-0,229818	-0,040297
13	-0,078208	-0,210081	0,045888	0,224201	0,057590	-0,188761	-0,20279
14	0,127093	-0,166645	-0,150999	0,123502	0,203929	(-2)-0,6972	-0,208908
15	0,205464	0,021075	-0,202654	-0,075115	0,172609	0,167173	-0,061160
50	(-2)-2,0371	(-2)-5,6796	(-2)9,5793	(-2)6,4459	(-2)-8,8058	(-2)-7,8548	(-2)7,2348
100	(-2)-2,0372	(-2)-2,0372	(-2)7,6837	(-2)2,3446	(-2)-7,5430	(-2)-2,9480	(-2)7,2482

**Tabla 3.** Valores de la ecuación modificada de Bessel  $I_n(x)$ .

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$I_2(x)$	$I_3(x)$	$I_4(x)$	$I_5(x)$	$I_6(x)$
0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	1,0100	0,1005	0,0050	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	1,0404	0,2040	0,0203	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000
0,6	1,0225	0,3137	0,0464	0,0046	0,0003	0,0000	0,0000
0,8	1,1665	0,4329	0,0844	0,0111	0,0011	0,0001	0,0000
1,0	1,2661	0,5652	0,1357	0,0222	0,0027	0,0003	0,0000
1,2	1,3937	0,7147	0,2026	0,0394	0,0058	0,0007	0,0001
1,4	1,5534	0,8861	0,2875	0,0645	0,0110	0,0015	0,0015
1,6	1,7500	1,0850	0,3940	0,0999	0,0194	0,0030	0,0004
1,8	1,9896	1,3170	0,5260	0,1482	0,0321	0,0056	0,0008
2,0	2,2796	1,5910	0,6890	0,2127	0,0507	0,0098	0,0016
2,2	2,6291	1,9140	0,8891	0,2976	0,0773	0,0164	0,0029
2,4	3,0493	2,2980	1,1341	0,4079	0,1145	0,0263	0,0051
2,6	3,5533	2,7550	1,4337	0,5496	0,1654	0,0408	0,0085
2,8	4,1573	3,3010	1,7994	0,7305	0,2341	0,06170	0,0138

Continúa Tabla 3



Continúa Tabla 3

3,0	4,8808	3,9534	2,2452	0,9598	0,3257	0,0912	0,0217
3,2	5,7472	4,7343	2,7883	0,2489	0,4466	0,1323	0,0333
3,4	6,7848	5,6700	3,4495	1,6119	0,6049	0,1886	0,0502
3,6	8,0277	6,7930	4,2540	2,0661	0,8105	0,2651	0,0741
3,8	9,5169	8,1400	5,2326	2,6326	1,0758	0,3678	0,1078
4,0	11,3019	9,7590	6,4222	3,3373	1,4163	0,5047	0,1545
4,2	13,4425	11,710	7,8684	4,2119	1,8513	0,6857	0,2186
4,4	16,0104	140,050	9,6258	5,2955	2,4047	0,9234	0,3060
4,6	19,0926	16,860	11,7611	6,6355	3,1060	1,2338	0,4239
4,8	22,7937	20,250	14,3550	8,2903	3,9921	1,6369	0,5819
5,0	27,2399	24,3401	17,5056	10,3312	5,1082	2,1580	0,7923
5,2	32,5836	29,250	21,3319	12,8451	6,5106	2,8288	1,0707
5,4	39,0088	35,180	25,9784	15,9388	8,2686	3,6890	1,4371
5,6	46,7376	42,330	31,6203	19,7429	10,4678	4,7884	1,9171
5,8	56,0381	50,950	38,4704	24,4148	13,2137	6,1890	2,5430
6,0	67,2344	61,340	46,7871	30,1505	16,6366	7,9685	3,3558
6,2	80,7179	73,890	56,8838	37,1867	20,8966	10,2233	4,4074
6,4	96,9616	89,030	69,1410	45,8130	26,1913	13,0738	5,7634
6,6	116,5370	107,30	84,0208	56,3830	32,7635	16,6697	7,5064
6,8	140,1360	129,40	102,0840	69,3283	40,9119	21,1966	9,7404
7,0	168,5940	156,000	124,0110	85,1755	51,0038	26,8855	12,5959
7,2	202,9210	188,300	150,6300	104,5670	63,4903	34,0224	16,2369
7,4	244,3410	227,20	182,9420	128,2870	78,9258	42,9621	20,8689
7,6	294,3320	274,20	222,1680	157,2920	97,9907	54,1437	26,7490
7,8	354,6850	331,10	269,7870	192,7470	121,5200	68,1108	34,1987
8,0	427,5640	399,87	237,5960	236,0750	150,5390	85,5358	43,6197

Tabla 4. Valores de la ecuación modificada de Bessel:  $K_n(x)$ .

x	K0(x)	K1(x)	K2(x)	K3(x)	K4(x)	K5(x)	K6(x)
0	¥	¥	¥	¥	¥	¥	¥
0,2	1,7527	4,7760	49,5124	995,0250	29900,2	1197000	59880150
0,4	1,1145	2,1844	12,0363	122,5470	1850,25	37127,5	930037
0,6	0,7775	1,3028	5,1203	35,4382	359,502	4828,80	80839,50
0,8	0,5653	0,8618	2,7198	14,4608	111,176	1126,22	14188,90
1,0	0,4210	0,6019	1,6248	7,1013	44,2324	360,961	3653,840
1,2	0,3185	0,4346	1,0428	3,9107	20,5963	141,219	1197,420
1,4	0,2437	0,3208	0,7020	2,3265	10,6728	63,3141	462,160
1,6	0,1880	0,2406	0,4887	1,4625	5,9731	31,3281	201,7740
1,8	0,1459	0,1826	0,3488	0,9578	3,5416	16,6984	96,3107
2,0	0,1139	0,1399	0,2538	0,6474	2,1959	9,4311	49,3512
2,2	0,0893	0,1079	0,1874	0,4485	1,4107	5,5782	26,7663
2,4	0,0720	0,0837	0,1400	0,3170	0,9326	3,4257	15,2061
2,6	0,0554	0,0653	0,1056	0,0078	0,6312	2,1701	8,9776
2,8	0,0438	0,0511	0,0803	0,1656	0,4358	1,4109	5,4747
3,0	0,0347	0,0402	0,0615	0,1222	0,3059	0,9378	3,4318
3,2	0,0276	0,3160	0,0474	0,0909	0,2177	0,6352	2,2027
3,4	0,2200	0,0250	0,0367	0,0681	0,1569	0,4373	1,4431
3,6	0,0170	0,0198	0,0285	0,0515	0,1143	0,3054	0,9625
3,8	0,0139	0,0157	0,0222	0,0391	0,0840	0,2059	0,6522
4,0	0,0112	0,0125	0,0174	0,0299	0,0622	0,1543	0,4481

Continúa Tabla 4

Continúa Tabla 4

4,2	0,0089	0,0099	0,0137	0,0229	0,0464	0,1114	0,3117
4,4	0,0071	0,0079	0,0108	0,0177	0,0349	0,0811	0,2192
4,6	0,0057	0,0063	0,0085	0,0137	0,0263	0,0595	0,1557
4,8	0,0046	0,0051	0,0067	0,0106	0,0200	0,0440	0,1116
5,0	0,0037	0,0040	0,0053	0,0083	0,0153	0,0327	0,0807
5,2	0,0030	0,0032	0,0042	0,0065	0,0117	0,0245	0,0587
5,4	0,0024	0,0026	0,0034	0,0051	0,0090	0,0184	0,0430
5,6	0,0019	0,0021	0,0027	0,0040	0,0070	0,0139	0,0320
5,8	0,0015	0,0017	0,0021	0,0031	0,0054	0,0105	0,0235
6,0	0,0012	0,0013	0,0017	0,0025	0,0042	0,0080	0,0175
6,2	0,0010	0,0011	0,0014	0,0020	0,0032	0,0061	0,0131
6,4	0,0008	0,0009	0,0011	0,0015	0,0025	0,0047	0,0099
6,6	0,0006	0,0007	0,0009	0,0012	0,0020	0,0036	0,0075
6,8	0,0005	0,0006	0,0007	0,0010	0,0015	0,0028	0,0057
7,0	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008	0,0012	0,0022	0,0043
7,2	0,0003	0,0004	0,0004	0,0006	0,0010	0,0017	0,0033
7,4	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0008	0,0013	0,0025
7,6	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0010	0,0019
7,8	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0015
8,0	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0004	0,0006	0,0011

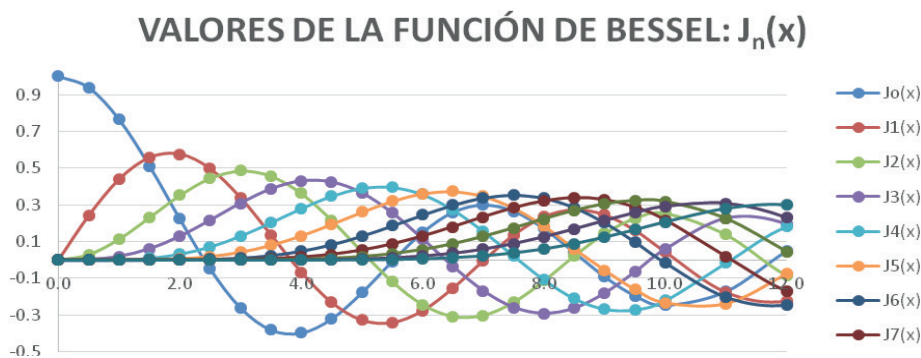


Figura 1. Gráfica de los valores de la función  $J_n(x)$ .

Los valores y funciones de Bessel que servirán para el proyecto, las llamadas raíces de dicha ecuación  $J_n(x)$ ; cuyo comportamiento se observa en la figura 1.

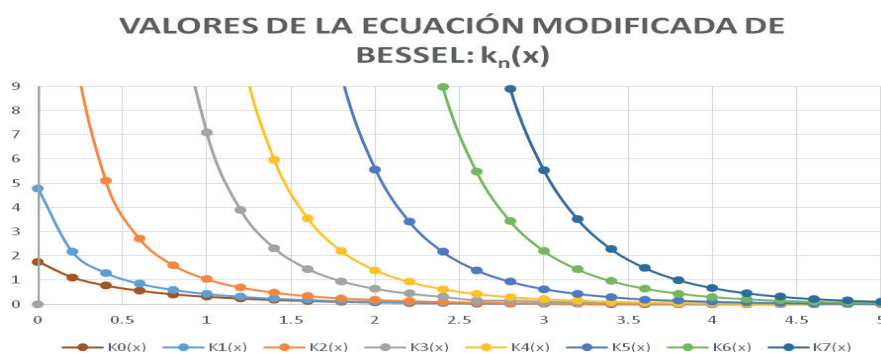


Figura 2. Gráfica de los valores de la función de Bessel modificada  $K_n(x)$ .



Los valores y funciones de Bessel son las llamados raíces de dicha ecuación  $K_n(x)$ ; cuyo comportamiento son las que se presentan en la figura 2.

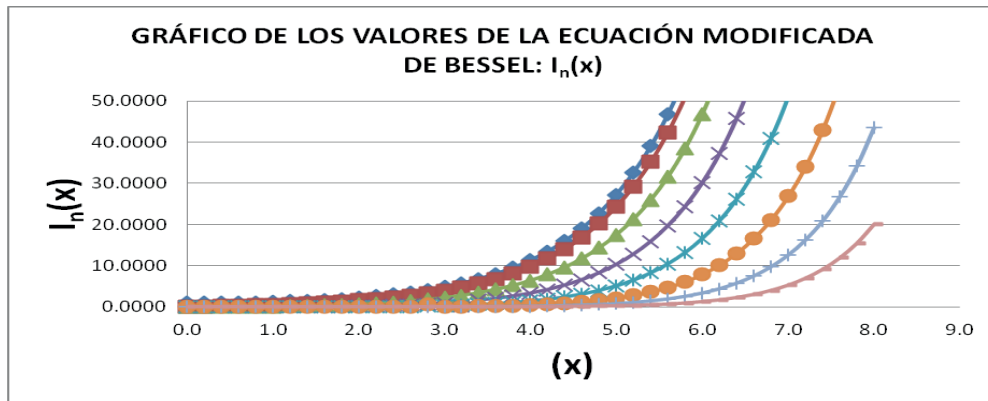


Figura 3. Gráfica de los valores de la función de Bessel modificada  $I_n(x)$ .

Los valores y funciones de Bessel son las llamados raíces de dicha ecuación  $I_n(x)$ ; cuyo comportamiento son las que se presentan en la figura 3.

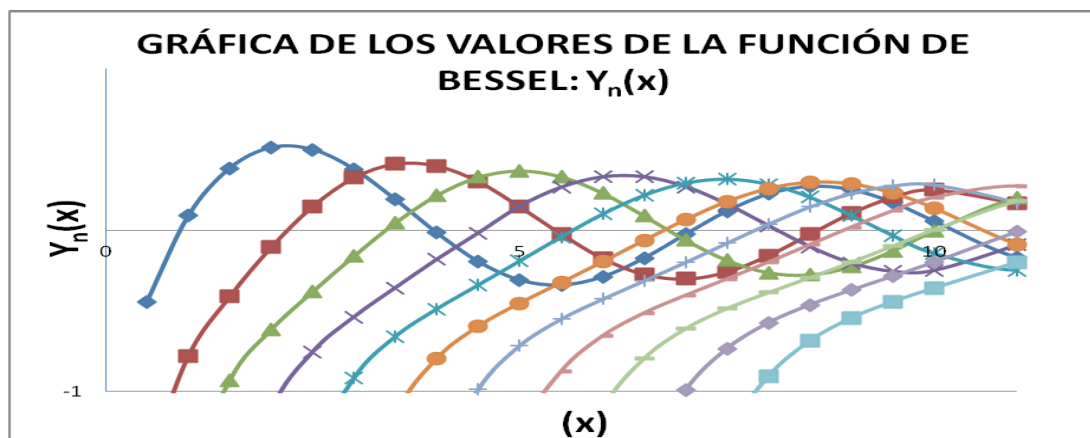


Figura 4. Gráfica de los valores de la función de Bessel modificada  $Y_n(x)$ .

Los valores y funciones de Bessel son las llamados raíces de dicha ecuación  $Y_n(x)$ ; cuyo comportamiento son las que se presentan en la figura 4.

transferencia de calor, para la distribución de temperatura en objetos finitos. Según Charm (2016) menciona que, para un cilindro finito, la distribución de temperatura está dada por el producto de las distribuciones de temperaturas de un cilindro y una placa infinitos (Fig. 5), cuya ecuación para un cilindro finito está representado por

Aplicación de los valores de la ecuación diferencial de Bessel  $J_n(x)$ . Los valores obtenidos en la tabla 1 y representados en la figura 1 se emplean en la ecuación de

$$\left(\frac{T_R - T}{T_R - T_0}\right)_{\text{cilindro infinito}} \times \left(\frac{T_R - T}{T_R - T_0}\right)_{\text{placa infinita}} = \left(\frac{T_R - T}{T_R - T_0}\right)_{\text{cilindro finito}} \dots (17)$$

Donde  $T_R$  es la temperatura ambiente,  $T_0$  es la temperatura inicial uniforme de los objetos y  $T$  es la temperatura en cualquier tiempo.

La distribución de temperatura para una placa infinita está dada por la relación siguiente

$$\left(\frac{T_R - T}{T_R - T_0}\right)_{\text{placa infinita}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} B_n \cos[B_n(r/r_m)]}{B_n + \text{sen} B_n + \cos B_n} \times e^{-(B_n)^2(Kt/(\rho C p r_m^2))} \dots (18)$$

Mientras que la distribución de temperatura para un cilindro infinito esta dado por

$$\left(\frac{T_R - T}{T_R - T_0}\right)_{\text{cilindro infinito}} = \frac{2}{r_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{B_n r}{r_m}\right) \times e^{-(B_n)^2(Kt/(\rho C p r_m^2))}}{\left(1 + \frac{K^2 B_n^2}{h^2 r_m^2}\right) \times \frac{B_n}{r_m} (J_1(B_n))} \dots (19)$$

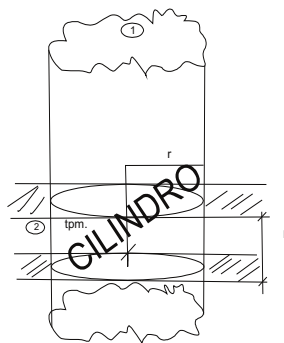
$$\frac{T_R - T}{T_R - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(R_n r/a)}{R_n (J_1(R_n))} \times e^{(-R_n^2 \cdot \alpha t/r^2)} \frac{T_R - T}{T_R - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(R_n r/a)}{R_n (J_1(R_n))} \times e^{(-R_n^2 \cdot \alpha t/r^2)} \dots (20)$$

Si se considera solo un término, tanto para placa como para cilindro; se tiene una expresión que adopta la siguiente forma

$$\frac{T_R - T}{T_R - T_0} = \frac{4}{\pi} \times e^{\left(\frac{-\pi^2}{4} \times \frac{\alpha t}{l^2}\right)} \times 1,601975 \times e^{\left(-5,783063 \times \frac{\alpha t}{r^2}\right)} \dots (21)$$

$$\frac{T_R - T}{T_R - T_0} = 2,0397 \times e^{-\alpha \left(\frac{2,4674}{l^2} + \frac{5,783063}{r^2}\right) \times t} \frac{T_R - T}{T_R - T_0} = 2,0397 \times e^{-\alpha \left(\frac{2,4674}{l^2} + \frac{5,783063}{r^2}\right) \times t} \dots (22)$$

$$J_0(0) = 1/J_0(0) = 1, \quad R_1 = 2,4048R_1 = 2,4048, \quad J_1(R_1) = 0,519153$$



**Figura 5.** Esquema representativo de un cilindro finito (intersección de un cilindro y una placa infinitos).

El análisis de la distribución de temperatura en envases, según las dimensiones indicadas, corresponde para un alimento como el puré de pera, que será envasado y contenido en un envase de dimensiones (307×113), donde la temperatura programada o de esterilizar será de  $T_R = 121,1^\circ C$ , la temperatura inicial  $T_0 = 20,5^\circ C$  y difusividad térmica  $\alpha = 0,00188 m^2/h$ . Reemplazando esta información en la ecuación (22), se tiene la expresión

de distribución de temperatura bajo estas condiciones, que realizando las operaciones respectivas se llega a la expresión final:

$$T = 121,1 - 205,19382 \times e^{-0,151468 \times t} \dots (23)$$

La distribución de temperatura, según la ecuación (23) se muestra en la tabla 5.

**Tabla 5.** Distribución de temperatura en el centro del envase en función del tiempo de calentamiento.

Tiempo de Proceso (t), min	Distribución de Temperatura (T), °C
0	-
2	-
4	-
5	24,90
6	38,41
8	60,02
10	75,98
12	87,77
14	95,48
16	102,92
18	107,67
20	111,18
22	113,77
24	115,69
26	117,10
28	118,14
30	118,92
32	119,49
34	119,91
36	120,22
38	120,45
40	120,62
42	120,75
44	120,84
46	120,91
48	120,96
50	120,99

## DISCUSIÓN

La ecuación diferencial de Bessel (Cruz & Ševčovič, 2020; Dehestani *et al.*, 2020; Izadi & Cattani, 2020), que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, tiene soluciones ondulatorias, cuyos valores de  $J_n(x)$  se reemplazan en las relaciones de transferencia de calor, facilitando el mecanismo de distribución de temperatura en alimentos enlatados en envases de hojalata (Jenson & Jeffreys, 2015). La transferencia de calor, según la ley de Fourier en envases cilíndricos, para alimentos en forma de conserva, se puede aplicar a envases de cualesquiera dimensiones, como para envases de dimensiones (307x113) (Welty, 2018). La distribución de temperatura para elementos rectangulares está conformada por una serie de términos de funciones senoidales y cosenoidales; mientras que la distribución de temperatura para un

cilindro finito está fundamentado y bien definido por la ecuación de Bessel (Himmelblau & Bischoff, 2017). La conducción de calor en la ingeniería de los alimentos es un proceso consecuente con la dificultad que nos brinda el proceso de calentamiento de los alimentos enlatados y el mejor entendimiento posible de este tipo de procesos, por necesitar las temperaturas de esterilización superiores a 100 °C (Manrique, 2017). Las ecuaciones de distribución de temperatura para placa finita y cilindro infinito; así como las representaciones gráficas de la ecuación de Bessel del tipo  $J_n(x)$ , concuerdan con lo señalado por Charm (2016) y Murray (2018), respectivamente. Los valores  $J_n(x)$  permiten y facilitan, de forma considerable, la distribución de temperatura en envases de geometrías cilíndricas; a su vez la distribución de temperaturas para alimentos contenidos en envases metálicos resulta tener un comportamiento continuo y

coherente, no sucediendo lo mismo con otros envases de geometría irregular.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M. 2013. *Las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones*. Ed. Mir. Moscú. Rusia.
- Arboleda, D.; Valencia, V.; Espinosa, J. & Ochoa, C. 2016. Modelo matemático para el proceso térmico de productos cárnicos de geometría cilíndrica. *Dyna*, 77: 301-307.
- Bakalis, S. 2019. *Modelling thermal processes: heating*. En: *Food process modeling*. Tijskens, L.M.N.; Hertog, M.L.A.T.M. & Nicolai, B.M. (eds.). CRS Press.
- Charm, S. E. 2016. *The fundamentals of food engineering*. The Avi Publishing Company, Inc. USA.
- Cruz, J.M.T.S. & Ševčovič, D. 2020. On solutions of a partial integro-differential equation in Bessel potential spaces with applications in option pricing models. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 37: 697-721.
- Dehestani, H.; Ordokhani, Y. & Razzaghi, M. 2020. Fractional-order Bessel wavelet functions for solving variable order fractional optimal control problems with estimation error. *International Journal of Systems Science*, 51: 1032-1052.
- Ding, Z.; Qin, F.G.F.; Peng, K.; Yuan, J.; Huang, S.; Jiang, R. & Shao, Y. 2021. Heat and mass transfer of scraped surface heat exchanger used for suspension freeze concentration. *Journal of Food Engineering*, 288: 110141.
- Himmelblau, D. & Bischoff, K. 2017. *Análisis y Simulación de Procesos*. Ed. Reverté. México.
- Himmelblau, D. 2011. *Principios y cálculos básicos de la Ingeniería Química*. Ed. Prince Hall Hispanoamericana, S.A. Impreso en México. D.F.
- Huamán, N.L. & Ancoco, T. 2018. Determinación de la conductividad térmica en carne de alpaca (*Lama pacos*) en la congelación. *Journal de Ciencia y Tecnología Agraria. CienciAgro*, 2: 325-330.
- Izadi, M. & Cattani, C. 2020. Generalized Bessel polynomial for multi-order fractional differential equations. *Symmetry*, 12: 1260.
- Jenson, V. & Jeffreys, V. 2015. *Métodos Matemáticos en Ingeniería Química*. Ed. Acribia. Zaragoza. España.
- Kreyszig, E.H. 2016. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Ed. Limusa. Grupo Noriega Ed. México. D. F.
- Manrique, A.J. 2017. *Transferencia de Calor*. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Ed. Harial Sa México.
- Marín, M.O. 2007. *Historia de la Matemática, los Grandes exponentes y científicos del Siglo XX*. Ed. UTP. Lima. Perú.
- Murray. R.S. 2018. *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*. Ed. McGraw-Hill. México. D. F.
- Sepúlveda, D.R. & Barboza-Cánovas, G.V. 2017. *Heat transfer in food products*. En: *Transport phenomena in food processing*. (Welti-Chanes, J.; Vélez-Ruiz, J.F. Barbosa-Cánovas, G.V.) (eds.), CRC Press.
- Simmons, G.H. 2018. *Matemática aplicada con modelamiento matemático elemental y aplicaciones prácticas*. Ed. Reverté. México. D. F.
- Spiegel, M.R. 2011. *Matemáticas avanzadas para ingenieros*. Octava ed. Ed. Indo Latinoamericana. Buenos Aires. Argentina.
- Thippareddi, H. & Sánchez, M. 2016. *Thermal processing of meat products*. En: *Thermal food processing: new technologies and quality issues*. (Sun, D.) (ed.). CRS Press.
- Welty, J.R. 2018. *Engineering Heat Transfer*. 6<sup>ta</sup> Ver. Printed in the United States of America.
- Welsh, Z.G.; Khan, I.H. & Karima, M.A. 2021. Multiscale modeling for food drying: A homogenized diffusion approach. *Journal of Food Engineering*, 292: 110252.

Received September 18, 2020.

Accepted October 12, 2020.