

# Implementaciones de Formalismos Quasi-Estocásticos en el Modelamiento de Sistemas No-Lineales en Circuitos de Moliendas de Minerales

Juan Tisza Contreras,<sup>1</sup> Huber Nieto-Chaupis

## Resumen

*Interesantes estudios han aparecido en los últimos años en lo que concierne la identificación de la fenomenología de las variables esenciales que están involucradas en aquellos sistemas complejos que son del tipo MIMO y que su entendimiento resulta clave para identificar los sistemas en circuitos de molienda así como también plantear un robusto esquema de control. En este reporte, nos centramos en la cuestión de modelar la fenomenología de la dinámica de la molienda de bolas enfatizando la variable que determina el tamaño de la partícula que es de enorme interés en facilidades mineras.*

## Palabras Claves

*Molienda de Bolas, Identificación de Sistemas, Convolución, Sistemas MIMO, NMPC.*

## Introducción

Tradicionalmente los procesos de extracción y procesado de minerales en complejos mineros han sido afrontados usando un amplio espectro de técnicas que cruzan a las metodologías matemáticas más abstractas hasta aquellas más novedosas que contienen aspectos prácticos de interés usadas en la ingeniería moderna. Claramente, el interés en conocer la fenomenología en los procesos mineros ha llevado a plantear diversos esquemas que apuntan al entendimiento de las variables del sistema no-lineal en cuestión. Una de ellas, el Control Predictivo, que ha sido usado notablemente en los últimos años como se ve reflejado en la literatura especializada, define la molienda como un sistema agudamente no-lineal MIMO (multi-input multi-output) por la competencia de muchas variables haciendo tal sistema casi intratable desde el punto de vista matemático [1]. La literatura ha también mostrado claramente dos corrientes bien definidas: (i) aquellas que enfatizan la visión del circuito como un todo, y (ii) aquellas que donde se analiza a la molienda como una composición de subsistemas. En efecto tanto en (i) como en (ii) se han observado pros y contras [2], enfatizando que aspectos no-lineales están inherentemente ligados a la dinámica de la molienda, que ha motivado la implementación de nuevos formalismos.

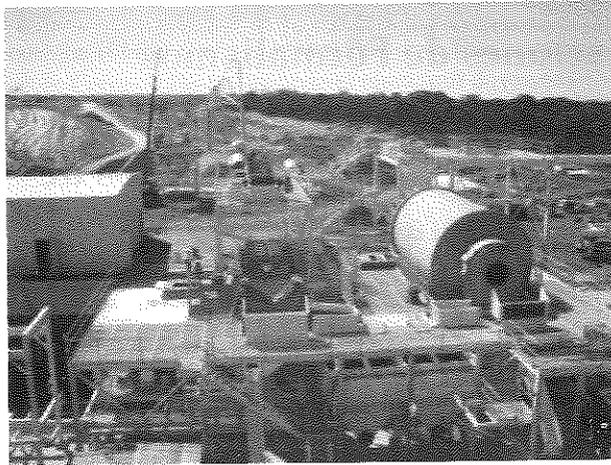


Fig.1.1.- Vista panorámica de un complejo minero en Australia donde se observa en el lado derecho el molino de bolas de minerales.

El presente reporte busca en concreto establecer aspectos básicos en la identificación de sistemas como aquel del circuito de molienda de bolas con el fin de definir un robusto modelo matemático para su posterior uso en el control del sistema y evaluar la importancia de las variables del sistema.

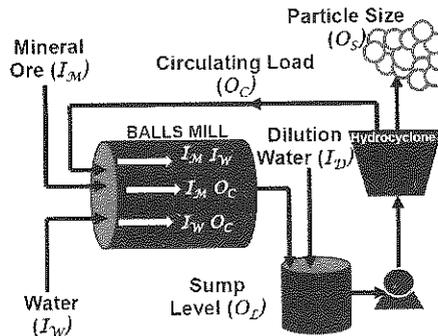


Fig. 1.2. Esquema del circuito de Molienda.

## El Modelo Matemático

En concreto seguimos la propuesta de [1] donde se establece que la relación I/O es dado por  $Y(s)=H(s)X(s)$  donde  $X(s)$  y  $Y(s)$  son las matrices de entrada y salida, mientras que  $H(s)$  es la matriz de transferencia donde hemos usado el hecho que  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t h(T)R(t-T) dT\right\} = H(s)R(s)$   
 En términos explícitos matriciales, la relación universal input output se escribe como:

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & H_{13}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & H_{23}(s) \\ H_{31}(s) & H_{32}(s) & H_{33}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde en (1) se ha asumido que existen 3 variables de entrada así como de salida. Claramente hay "N" variables de entrada en un sistema no lineal complejo como el de la molienda. Para fines de usar metodologías matemáticas avanzadas y evitar complicaciones para extraer la fenomenología que existe detrás del problema hemos definido variables que han sido estudiadas previamente.

En efecto, por ejemplo en la Ref. [2], se ha establecido que H(s) es una matriz 4X4 lo que ha llevado a una robusta identificación del sistema bajo estudio. En este reporte establecemos uno del tipo 3X3; como variables input: a la carga de mineral entrando a la molienda (Rm), el caudal de agua que alimenta la molienda (Ra) y el agua que diluye la pulpa (Rd), mientras que las variables output son el radio de la partícula (Rp), la altura del sumidero y la carga circulante. Aquello es representado gráficamente en la fig. 1.2 donde se describe las componentes. Nos vamos a concentrar en el radio de la partícula que es considerado por muchos autores como la variable de mayor importancia. La relación que vincula el radio de la partícula con las variables input se puede escribir como

$$R_p(t) = \int_0^{ta} h_{11}(T)R_m(t-T)dT + \int_0^{tb} h_{12}(T)R_a(t-T)dT + \int_0^{tc} h_{13}(T)R_d(t-T)dT \quad (2)$$

donde en (2) las  $h_{ij}$  son las funciones de transferencia o también llamados kernels de la convolución. Intuitivamente, el comportamiento de los kernels puede responder a funciones suaves libres de fuertes fluctuaciones en concordancia a la fenomenología experimental observada en [2]. Aunque las observaciones han también corroborado la naturaleza determinista de las variables con respecto al tiempo, una apreciación que incluya cuestiones de carácter estocástico no se ha reportado. En este sentido, se propone re-escribir la Ec. (2) a una que comprometa componentes estocásticos como sigue

$$R_p(t) = \int_0^{ta} g_1(T)R_m(t-T)dT + \int_0^{tb} g_2(T)R_a(t-T)dT + \int_0^{tc} g_3(T)R_d(t-T)dT \quad (3)$$

donde  $g_i(T) = F_i(T) \cdot h_{ij}(T)$  incorpora los efectos estocásticos que surgen por la correlación de las variables en el tiempo. La idea principal de (3) es la de buscar una estabilidad en el radio de la partícula Rp y también la de identificar si existe una correlación relevante con una de las variables input. Abajo en la fig. 2.1, se grafica la simulación usando Ec. (3).

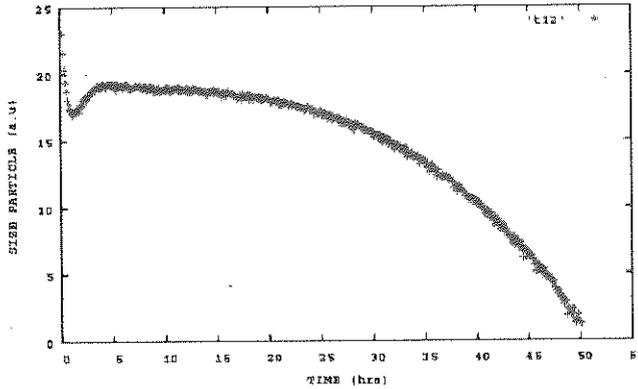


Figura 2: Evolución del tamaño de la partícula en 50 horas de muestreo, en unidades arbitrarias.

En la fig. 2.1 se muestra el radio de la partícula en unidades arbitrarias y en donde se muestra una excelente estabilidad en las primeras 20 horas de operación mientras que un tiempo después la estabilidad como refleja en la drástica reducción por más del 50% se grafica una minimización del radio hasta un valor mínimo. Esto ocurre porque las funciones  $F_i(T)$  son convergentes pero conteniendo un carácter random. Esta mixtura incorpora una interesante visión: monitorear la estabilidad de las funciones output ante la presencia de fluctuaciones y disturbios que podrían aparecer y que reconfiguraría el sistema sustancialmente, como reportado en [3] y [4]. Por otra parte, la curva mostrada en la fig. 2.1 a partir de la Ec. (3) busca identificar cual de las variables input contribuye notablemente en la evolución del radio de la partícula. El comportamiento en función del tiempo va a variar para diferentes lapsos, por ejemplo en  $t_a < t < t_b$  la función  $R_p(T)$  tiene un comportamiento muy diferente como cuando evoluciona en  $t_c < t < t_d$ . En general, en cada lapso la contribución de cada integral de la Ec. (3) va a depender del peso de las funciones  $F_i(T)$  que genera la convolución de las funciones input. Veamos el comportamiento del sistema cuando ocurren interacciones entre las variables.

### Incorporación de las Interacciones

La fig. 2.1 permite ver que no solamente hay situaciones de contribución lineal de parte de los 3 inputs como lo dicta  $Y(s)=H(s)X(s)$ . En lo que respecta si existen aquellas contribuciones no lineales es evidente por la naturaleza de los múltiples input y outputs. En otras palabras se contempla una expresión general de la forma  $Y(s)=H(s)X(s)+H_2(s)X_2(s)+...+H_n(s)X_n(s)$  para sistemas tipo MIMO. Por ejemplo la interacción entre el agua y el mineral puede ser escrito como el producto de la primera y segunda integral de la Ec. (3)

36

donde el carácter no lineal de la Ec. (4) se manifiesta como el producto de las funciones de

$$I^{(2)}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g_1(T) \times Rm(t-T) g_2(n) Ra(t-n) dT dn \quad (4)$$

transferencia en la forma  $g_1 g_2 \sim g_2$ . El acoplamiento de variables y como consecuencia la evidente interacción entre ellas se define como

$$I^{(2)}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} g_{12}(T, n) \times Rm(t-T) Ra(t-n) dT dn \quad (5)$$

en la cual se exhibe el carácter no lineal de hasta segundo orden debido al producto de las funciones inputs. En (5) debe notarse que la función de transferencia  $g_{12}$  ha absorbido las respectivas "g" provenientes de las relaciones I/O para el caso del mineral y agua. Uno puede argüir que en el escenario que se contemple retrasos, es decir que la entrada de los volúmenes de agua y mineral no sea en simultáneo, sino que uno va después del otro en un tiempo que es una fracción importante en un ciclo completo del circuito, la validez del hecho que  $g_{12}$  sea no la correcta.

En efecto, hay casos donde la separabilidad de  $g_{12}$  no podría describir correctamente la fenomenología del fenómeno más aún cuando la estabilidad no está completamente determinada debido a la naturaleza MIMO del sistema. Para descartar situaciones de contribución sin significado físico la función de transferencia de segundo orden puede ser restringida en el espacio temporal como sigue:

$$g_{12}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \alpha < 0, \beta < 0 \\ 0 \Leftrightarrow \alpha < 0, \beta > 0 \\ 0 \Leftrightarrow \alpha > 0, \beta < 0 \end{cases} \quad (6)$$

siendo separable  $g_{12}(\alpha, \beta) = g_1(\alpha) g_2(\beta)$  para los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  cuando son mayores a cero. Bajo esta hipótesis la integral dada por la Ec. (5) va a carecer de contribuciones inconsistentes a lo largo del tiempo de muestreo.

De esta forma se puede generalizar a uno de tercer orden en donde también se aplica el mismo criterio de la separabilidad con restricciones similares a (6),

$$I^{(3)}(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} g_{123}(T, n, \beta) \times Rm(t-T) Ra(t-n) Rd(t-\beta) dT dn d\beta \quad (7)$$

En realidad se han considerado las interacciones de mayor importancia. El modelado del sistema de molienda como se dibuja en la fig. 2.1 en realidad contempla otras interacciones que hasta cierto punto podrían ser despreciables en comparación a otras como las que se están considerando en (5) y (7). Con las ecuaciones antes derivadas, puede escribirse la completa ecuación de evolución temporal del radio de la partícula como función de convoluciones de primer, segundo y de tercer grado en la siguiente forma ( $t_a > t_b > t_c$ ):

$$R_p(t) = \int_0^{t_a} g_1(T) R_m(t-T) dT + \int_0^{t_b} g_2(T) R_a(t-T) dT + \int_0^{t_c} g_3(T) R_d(t-T) dT$$

$$+ \int_0^{t_a} \int_0^{t_b} g_{12}(T, n) R_m(t-T) R_a(t-n) dT, dn + \int_0^{t_a} \int_0^{t_b} \int_0^{t_c} g_{123}(T, n, \beta) R_m(t-T)$$

$$\times R_a(t-n) R_d(t-\beta) dT dn d\beta \quad (8)$$

### La Simulación del Proceso y Resultados

Se ha simulado la evolución del radio de la partícula como escrito en la Ec. (8) considerando funciones inputs del tipo quasi escalón normalizadas a la unidad y con las funciones

Tiempo	Volumen (T/h)		
	Agua	Mineral	Diluyente
1	15	40	2.5
3	18	50	2.1
10	22	40	0.9
50	25	35	0.8
Tiempo	Radio Partícula -200mesh		
	Lineal	2do	3er
1	65	45	63
3	75	77	78
10	75	79	79
Tiempo	Fluctuación (%)/Discrepancia		
	Lineal	2do	3er
1	0.1	0.01	0.005
3	0.5	0.07	0.003
10	0.05	0.05	0.001

Tabla 4.1. Valores de entrada que son considerados en la simulación de la Ec. 8.

En conjunción, se han considerado los valores mostrados en la tabla 4.1, que alimentan las constantes de las funciones input en cada loop. Se ha establecido un horizonte de hasta 50 horas para la alimentación de la molienda con agua y mineral y con un feedback de la carga circulante, que es aquel producto que no puedo ser procesado en subsecuentes procesos de clasificación de mineral.

Se han asociado envolventes random que proveen un peso a las integrales haciendo que las contribuciones tengan el carácter estocástico y que son cruciales en el modelo en definir la evolución del radio de la partícula a lo largo de un tiempo real como usado en facilidades mineras [4].

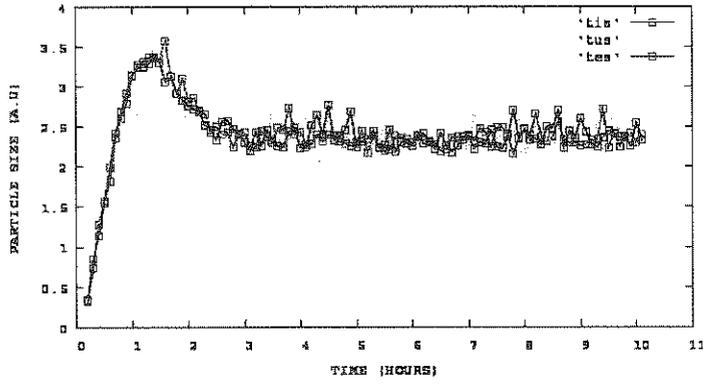


Fig. 4.1. Evolución temporal del radio de la partícula en unidades arbitrarias. La simulación muestra hasta tres escenarios posibles y se observa la consistencia del modelo planteado. Se asume un retraso de 2 minutos en el agua y el mineral.

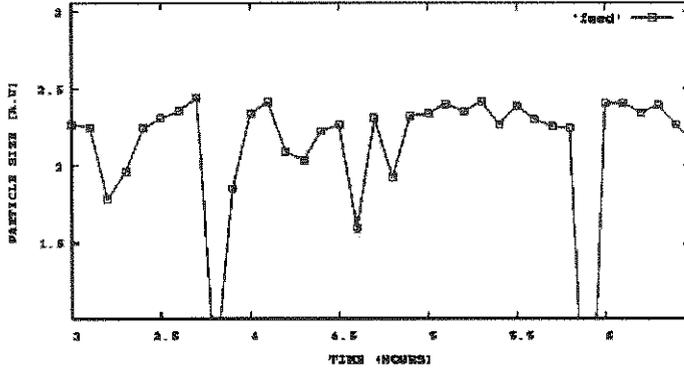


Fig. 4.2. Fluctuaciones estocásticas en la evolución temporal del radio de la partícula como consecuencia de incorporar interacciones de variables en el modelo.

En la fig. 4.1 se muestra la evolución mostrando una estabilidad con una discrepancia de hasta 0.5% [3]. En la fig. 4.2 se muestra el caso que una sobrealimentación de carga circulante en la molienda podría generar episodios de vómito de la molienda generando pérdida en la razón costo-beneficio. En conclusión, las simulaciones indican claramente que un modelo basado en funciones random podría ser idóneo para ser usado en esquemas robustos de control que necesitan seguir una trayectoria de referencia con una mínima discrepancia, como lo requeriría un sistema de control del grano de mineral que exige precisión.

**REFERENCIAS:**

- XI-SONG CHEN, ET.AL.,: Application of model predictive control in ball mill grinding circuit", Miner. Eng. 20 (2007) 1099-1108.
- C. BOUCHE, C. BRANDT Y A. BROUSSAUD: "Advanced control of gold ore grinding plants in South Africa", Miner. Eng. 18 (2005) 866-876.
- H. NIETO-CHAUPIS Y J. TISZA-CONTRERAS: "Attempts of Modeling the Particle Size Evolution in a Balls Mill Grinding Circuit", presentado en INDUSCON 2010 Sao Paulo. Aceptado para ser publicado en IEEEExplore. Ibid, Modeling of the Mineral Particle-Size Through Stochastic Input Signals in a Balls Mill Grinding Circuit", presentado en ANDESCON 2010 Bogotá Colombia. Aceptado para ser publicado en IEEEExplore.
- M. DUARTE ET.AL.,: "A comparative experimental study of five multivariable control strategies applied to a grinding plant", Powder Technol. 104 (1999) 1-28.