ISSN Versión impresa: 1992-2159; ISSN Versión electrónica: 2519-5697

Biotempo, 2023, 20(2), jul-dec.: 183-196.

doi:10.31381/biotempo.v20i2.5945

Biotempo (Lima)

https://revistas.urp.edu.pe/index.php/Biotempo

ORIGINAL ARTICLE / ARTÍCULO ORIGINAL

QUANTIFICATION OF THE ALKALINITY OF NATURAL WATER BY APPLYING BERNOULLI NUMBERS AND SIMPSON'S APPROXIMATE INTEGRAL

CUANTIFICACIÓN DE LA ALCALINIDAD DEL AGUA NATURAL APLICANDO LOS NÚMEROS DE BERNOULLI Y LA INTEGRAL APROXIMADA DE SIMPSON

Olegario Marín-Machuca[1*], Fredy Aníbal Alvarado-Zambrano[2], Jessica Blanca Vargas-Ayala[3], Julia Iraida Ortiz-Guizado[4], Luis Germán Jáuregui-del-Águila[5], Ricardo Arnaldo Alvarado-Zambrano[6], Ulert Marín-Sánchez[7], José Eduardo Candela-Díaz[8], Alexander Quispe-Quispe[9] & Obert Marín-Sánchez[10]

[1] Escuela Profesional de Ingeniería Alimentaria, Facultad de Oceanografía, Pesquería, Ciencias Alimentarias y Acuicultura y Grupo de Investigación en Saneamiento Ambiental (GISA), Escuela Universitaria de Posgrado (EUPG). Universidad Nacional Federico Villarreal. Lima, Perú.

[2] Facultad de Ingeniería en Industrias Alimentarias, Laboratorio de Análisis Sensorial de Alimentos. Universidad Nacional Santiago Antunez de Mayolo. Ancash, Perú.

[3] Escuela Profesional de Ingeniería en Acuicultura. Facultad de Oceanografía, Pesquería, Ciencias Alimentarias y Acuicultura. Universidad Nacional Federico Villarreal. Lima Perú.

[4] Facultad de Ingeniería, Departamento Académico de Ciencias Básicas. Universidad Nacional José María Arguedas. Apurímac, Perú.

[5] Escuela Profesional de Ingeniería Alimentaria, Facultad de Oceanografía, Pesquería, Ciencias Alimentarias y Acuicultura. Universidad Nacional Federico Villarreal. Lima, Perú.

[6] Facultad de Industrias Alimentarias. Departamento de Ciencia y Tecnología. Universidad Nacional Agraria de la Selva. Tingo María, Perú.

[7] Dirección General de Asuntos Ambientales de Industria (DGAAMI). Ministerio de la Producción (PRODUCE). Lima, Perú.

[8] Laboratorio de Tecnología de Alimentos. Facultad de Oceanografía, Pesquería, Ciencias Alimentarias y Acuicultura. Universidad Nacional Federico Villarreal. Lima, Perú.

[9] Facultad de Ingeniería Ambiental y Sanitaria. Universidad Nacional San Luis Gonzaga. Ica, Perú.

[10] Escuela Profesional de Ingeniería Ambiental. Facultad de Ingeniería y Gestión. Universidad Nacional Tecnológica de Lima Sur. Lima, Perú.

* Corresponding author: omarin@unfv.edu.pe

Olegario Marín-Machuca: https://orcid.org/0000-0002-0515-5875
Fredy Aníbal Alvarado-Zambrano: https://orcid.org/0000-0002-7213-656X
Jessica Blanca Vargas-Ayala: https://orcid.org/0000-0002-8889-0954
Julia Iraida Ortiz-Guizado: https://orcid.org/0000-0001-5626-7992
Luis Germán Jáuregui-del-Águila: https://orcid.org/0009-0005-0062-8759
Ricardo Arnaldo Alvarado-Zambrano: https://orcid.org/0000-0002-5060-6428
Ulert Marín-Sánchez: https://orcid.org/0000-0003-2487-782X

José Eduardo Candela-Díaz: https://orcid.org/0000-0002-4198-5745
Alexander Quispe-Quispe: https://orcid.org/0000-0002-3822-6959
Marín-Sanchez, Obert: https://orcid.org/0000-0003-2912-1191

ABSTRACT

The calculation of Bernoulli numbers is because there are numerous mathematical expressions and environmental engineering phenomena in which they can be applied. Although it is true that, with the aid of the computer and the use of programs, there are a great number of them; in the current references they are published in a reduced number and, therefore, when using them, unsatisfactory approximations are made. The purpose was to calculate the first 20 Bernoulli numbers, apply them to mathematics ($\int \ln(cosx)dx$) and environmental engineering, quantifying the alkalinity of natural water in the form of calcium carbonate (C_aCO_3)(mg/l), measuring carbon dioxide (CO_2). There is a great variety of relations containing Bernoulli numbers presented in several practical applications of mathematics. The best relationships used here are binomial developments. Employing the appropriate equations, the Bernoulli numbers were calculated mechanically, arriving to determine the target number of numbers. Finally, the Bernoulli numbers contribute significantly to mathematical calculations such as calculating integrals of the type $\ln(cosx)$, as well as to applications to environmental engineering, evaluating the alkalinity of water as calcium carbonate (C_aCO_3).

Keywords: natural water – alkalinity – Bernoulli numbers – calcium carbonate – integrals

RESUMEN

El cálculo de los números de Bernoulli se fundamenta en que existen numerosas expresiones matemáticas y fenómenos de la ingeniería ambiental en las que se pueden aplicar. Sí bien es cierto que, con ayuda de la computadora y el uso de programas, existen gran cantidad de ellos; en las referencias actuales se publican en un número reducido y, por lo tanto, al emplearlas, se hacen aproximaciones no satisfactorias. El propósito fue calcular los veinte primeros números de Bernoulli, aplicarlo a la matemática ($\int \ln(cosx)dx$) y a la ingeniería ambiental, cuantificando la alcalinidad del agua natural en forma de carbonato de calcio (C_aCO_3)(mg/l), midiendo el dióxido de carbono (CO_2). Existe una gran variedad de relaciones que contienen a los números de Bernoulli presentándose en varias aplicaciones prácticas de la matemática. Las mejores relaciones utilizadas en esta oportunidad son desarrollos binomiales. Empleando las ecuaciones planteadas y adecuadas, los números de Bernoulli fueron calculados mecánicamente, llegando a determinar el número de números planteados como objetivo. Finalmente, los números de Bernoulli contribuyen de forma significativa a cálculos matemáticos como para calcular las integrales del tipo $\ln(cosx)$, así como las a aplicaciones a la ingeniería ambiental, evaluando la alcalinidad del agua como carbonato de calcio (C_aCO_3).

Palabras clave: agua natural – alcalinidad – carbonato de calcio – integrales – números de Bernoulli

INTRODUCCIÓN

Benton (1964), y Bronshtein & Semendiaev (2018) mencionan que los números de Bernoulli provienen de una familia ligada por varias décadas a la matemática y a la ingeniería, e incluso llegando a plantear soluciones a problemas de análisis matemático en el campo de las ecuaciones diferenciales y su método de solución (Simmons, 1998). Los números de Euler aparecen cuando Leonard Euler publica sus obras "geniales" sobre Introducción al Análisis, *Inatitutiones Cálculi Differentialis* y *Álgebra* (Boyer, 1987).

La dificultad en la determinación de los números de Bernoulli se fundamenta en que existen fenómenos científicos e ingenieriles, en los que hay funciones que relacionan a estos números, y que deben ser analizados, evaluados e interpretados (Courant & Fritz, 2015). Se menciona que los números de Bernoulli son un número muy amplio, pero se publican un número reducido y por lo tanto se emplean otros tipos de soluciones, como las técnicas por aproximación. Razón por la cual se justifica su determinación de los números mencionados. Benton (1964) menciona que Jacobo Bernoulli publicó su libro denominado *Ars Conjectandi*, donde se encuentra las fórmulas para el cálculo de las sumas de potencias de exponente entero y positivo de los *n* primeros números naturales. Además, los números Bernoulli son todos positivos y a partir del cuarto crecen sin límite o indefinidamente, de tal manera que se puede plantear la relación $\underset{m=\infty}{lím}\left(\frac{B_m}{B_{m-1}}\right)=\frac{m^2}{\pi^2}$ (Dover Publications, 1965).

Los números de Bernoulli fueron utilizados por primera vez por Moivre y Euler (Vera, 1960; Fernández, 2012). Los números de Bernoulli tienen aplicaciones prácticas a las ciencias matemáticas en diversos campos de la matemática y algunas aplicaciones a la ingeniería ambiental y mencionando que uno de los once descendientes se marchó a Basilea para continuar con el legado de la descendencia de la familia (Marín-Machuca, 2003; Bronshtein & Semendiaev, 2018; Komatsu & Pita-Ruiz, 2020; Küçükoğlu *et al.*, 2020; Kim *et al.,* 2022). Se menciona a su vez que los números de Bernoulli son publicados por primera vez en el año de 1713, en la obra titulada *Ars Conjectandi*, después de ocho años de haberse producido la muerte de su autor, Jacobo Bernoulli (Fernández, 2012; Child, 2017).

Con respecto a los números de Bernoulli las relaciones en forma de series son las que contienen a estos números (Martínez *et al.*, 2014). Los números de Bernoulli no tienen relación directa con la ecuación de Bernoulli y dicha ecuación, con respecto al flujo de fluidos, presenta ciertas dificultades para ser comprendida y aplicada por los estudiantes de materias que describen fenómenos de flujo de fluidos o comportamientos de las propiedades del agua, tanto químicas y fisicoquímicas y es la capacidad del agua para neutralizar ácidos fuertes al observar las curvas de titulación (Vega *et al.*, 2017).

Uno de los parámetros para evaluar la calidad del agua natural es la alcalinidad que está provocada por la presencia de hidróxidos, carbonatos, y bicarbonatos de elementos como el calcio, el magnesio, el sodio, el potasio, o el amoniaco; y de entre todos ellos los más comunes son el bicarbonato de calcio ($Ca(HCO_3)_2$) y el bicarbonato de magnesio ($Mg(HCO_3)_2$), teniendo presente que la alcalinidad ayuda a regular los cambios de pH producidos por la adición ácidos (Vega *et al.*, 2017).

La alcalinidad es una medida de la capacidad del agua natural para neutralizar ácidos; que al examinar las curvas de titulación de un ácido fuerte, el ácido sulfúrico (H_2SO_4) y de uno relativamente débil, ácido carbónico ($H_2CO_3(CO_2)$) se observa que debajo de 4,5 de pH la acidez se debe a la presencia de un ácido mineral fuerte (H_2SO_4), en tanto que en un rango de pH entre 4,5 y 8,5, el ($H_2CO_3(CO_2)$) es la fuente de acidez que tiende a neutralizar la base fuerte, hidróxido de sodio ($NaOH$) y los iones carbonatados de los diferentes tipos de aguas (Sierra & Gómez, 2020). En las aguas minerales, las fuentes principales de acidez son el dióxido de carbono (CO_2) provenientes de la atmósfera y de la oxidación bacteriana de la materia orgánica, la acidez mineral de los residuos industriales, del drenaje de las minas y de la lluvia ácida; aclarando que las aguas ácidas no constituyen una amenaza para la salud humana, pero causan gran preocupación por su capacidad de corrosión y porque trastornan las condiciones ambientales de los lagos (Sierra & Gómez, 2020).

Existen casos en que las concentraciones de algunas sustancias de los diferentes tipos de agua se comportan como funciones en series de potencias; dando lugar a que, en la cuantificación de sustancias químicas, tanto alcalinas como ácidas, se utilicen los números de Bernoulli, debido a que estos procesos son descendentes con carácter asintótico como los diferentes comportamientos de la alcalinidad del agua (Sierra & Gómez, 2020).

Los números de Bernoulli representan procesos de decadencia asintótica en cuanto a la conservación de la energía mecánica y otras aplicaciones; permitiendo de forma analítica y experimental determinar los diferentes parámetros como tiempo de vaciado del tanque de almacenamiento, área de las tuberías, velocidad del flujo y carga de velocidad (Zamora *et al.*, 2020).

Es muy importante los números de Bernoulli en procesos de disminución asintótica, siendo una adecuada estrategia para resolver situaciones problemáticas de complejas transiciones cortas, teniendo en cuenta que las pérdidas de fricción o rozamiento resultan despreciables (Urbina *et al.*, 2022).

El propósito ha sido determinar y evaluar los veinte primeros números de Bernoulli, presentarlos cada uno de ellos en forma de tabla y aplicarlos en el cálculo de las integrales y en la determinación de la alcalinidad del agua natural.

MATERIALES Y MÉTODOS

Series de los números de Bernoulli. Se ha encontrado relaciones que contienen a los números de Bernoulli, las mismas que se presentan a continuación.

1. $\frac{x}{2}cot\frac{x}{2}=1-B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}-B_3\frac{x^6}{6!}-\ldots$
2. $\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}=1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+B_3\frac{x^6}{6!}-\ldots$
3. $B_m=\frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\left[1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\ldots\right]$
4. $B_m=4m\int\frac{t^{2m-1}dt}{e^{2\pi t}-1}$

5. $tgx = 2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{2!} + 2^4(2^4-1)B_2\frac{x^3}{4!} + \ldots$
6. $log\frac{senx}{x} = -\frac{2}{1}B_1\frac{x^2}{2!} - \frac{2^3}{2}B_2\frac{x^4}{4!} - \frac{2^5}{3}B_3\frac{x^6}{6!} - \ldots$
7. $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!} = B_0 + B_1 x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 + \ldots$
8. $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \ldots$
9. $x\cot x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B_{2n}(2x)^{2n}}{(2n)!}$
10. $1 - \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{B_1 x^2}{2!} + \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} + \ldots$
11. $B_{2n} = \frac{2(-1)^{n-1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\right)$
12. $\binom{2n+1}{2}2^2B_1 - \binom{2n+1}{4}2^4B_2 + \binom{2n+1}{6}2^6B_3 - \ldots(-1)^{n-1}(2n+1)2^{2n}B_n = 2n$

Otras series que relacionan a los números de Bernoulli (Bronshtein y Semendiaev, 2018):

13. $B_n = \frac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \ldots\right)$
14. $B_n = \frac{(2n)!}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\right)$
15. $B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots\right)$

$$16.\ B_n = n! \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & . & . & . & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

Protocolo para calcular los números de Bernoulli. La expresión importante que relaciona a los números de Bernoulli y usada en esta oportunidad es la señalada por la literatura científica (Fernández, 2012):

$$\binom{2n+1}{1}B_n - \binom{2n+1}{3}B_{n-1} + \binom{2n+1}{5}B_{n-2} + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-1}B_1 + (-1)^n\left(n-\frac{1}{2}\right) = 0\ldots \textbf{(1)}$$

Con ella se ha calculado los veinte primeros números de Bernoulli (B_{20}) tal como sigue:

Cálculo de $\boldsymbol{B_1}$

$$\binom{3}{1}B_1 - \left(1-\frac{1}{2}\right) = 0; \frac{3!}{1!\times 2!}B_1 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{B_1 = \frac{1}{6}}$$

Cálculo de $\boldsymbol{B_2}$

$$\binom{5}{1}B_2 - \binom{5}{3}\times\frac{1}{6} + \left(2-\frac{1}{2}\right) = 0; \frac{5!}{1!\times 4!}B_2 - \frac{5!}{3!\times 3!}\times\frac{1}{6} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_2 = \frac{1}{30}}$$

Cálculo de B_3

$$\binom{7}{1}\times B_3-\binom{7}{3}\times\frac{1}{30}+\binom{7}{5}\times\frac{1}{6}-\left(3-\frac{1}{2}\right)=0;\ \frac{7!}{1!\times6!}\times B_3-\frac{7!}{3!\times4!}\times\frac{1}{30}+\frac{7!}{5!\times2!}\times\frac{1}{6}-\frac{5}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_3=\frac{1}{42}}$$

Cálculo de B_4

$$\binom{9}{1}\times B_4-\binom{9}{3}\times\frac{1}{42}+\binom{9}{5}\times\frac{1}{30}-\binom{9}{7}\times\frac{1}{6}+\left(4-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{9!}{1!\times8!}\times B_4-\frac{9!}{3!\times6!}\times\frac{1}{42}+\frac{9!}{5!\times4!}\times\frac{1}{30}-\frac{9!}{7!\times2!}\times\frac{1}{6}+\frac{7}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_4=\frac{1}{30}}$$

Cálculo de B_5

$$\binom{11}{1}B_5-\binom{11}{3}\frac{1}{30}+\binom{11}{5}\frac{1}{42}-\binom{11}{7}\frac{1}{30}+\binom{11}{9}\frac{1}{6}-\left(5-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{11!}{1!\times10!}B_5-\frac{11!}{3!\times8!}\frac{1}{30}+\frac{11!}{5!\times6!}\times\frac{1}{42}-\frac{11!}{7!\times4!}\frac{1}{30}+\frac{11!}{9!\times2!}-\frac{9}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_5=\frac{5}{66}}$$

Cálculo de B_6

$$\binom{13}{1}B_6-\binom{13}{3}\frac{5}{66}+\binom{13}{5}\frac{1}{30}-\binom{13}{7}\frac{1}{42}+\binom{13}{9}\frac{1}{30}-\binom{13}{11}\frac{1}{6}+\left(6-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{13!}{1!\times12!}B_6-\frac{13!}{3!\times10!}\frac{5}{66}+\frac{13!}{5!\times8!}\frac{1}{30}-\frac{13!}{7!\times6!}\frac{1}{42}+\frac{13!}{9!\times4!}\frac{1}{30}-\frac{13!}{11!\times2!}\frac{1}{6}+\frac{11}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_6=\frac{691}{2730}}$$

Cálculo de B_7

$$\binom{15}{1}B_8-\binom{15}{3}\frac{691}{2730}+\binom{15}{5}\frac{5}{66}-\binom{15}{7}\frac{1}{30}+\binom{15}{9}\frac{1}{42}-\binom{15}{11}\frac{1}{30}+\binom{15}{13}\frac{1}{6}-\left(7-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{15!}{1!\times14!}B_7-\frac{15!}{3!\times12!}\frac{691}{2730}+\frac{15!}{5!\times10!}\frac{5}{66}-\frac{15!}{7!\times8!}\frac{1}{30}+\frac{15!}{9!\times6!}-\frac{15!}{11!\times4!}\frac{1}{30}+\frac{15!}{13!\times2!}\frac{1}{6}-\frac{13}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_7=\frac{7}{6}}$$

Cálculo de B_8

$$\binom{17}{1}B_8-\binom{17}{3}\frac{7}{6}+\binom{17}{5}\frac{691}{2730}-\binom{17}{7}\frac{5}{66}+\binom{17}{9}\frac{1}{30}-\binom{17}{11}\frac{1}{42}+\binom{17}{13}\frac{1}{30}-\binom{17}{15}\frac{1}{6}+\left(8-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{17!}{1!\times16!}B_8-\frac{17!}{3!\times14!}\frac{7}{6}+\frac{17!}{5!\times12!}\frac{691}{2730}-\frac{17!}{7!\times10!}\frac{5}{66}+\frac{17!}{9!\times8!}\frac{1}{30}-\frac{17!}{11!\times6!}\frac{1}{42}+\frac{17!}{13!\times4!}\frac{1}{30}-\frac{17!}{15!\times2!}\frac{1}{6}+\frac{15}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_8=\frac{3617}{510}}$$

Cálculo de B_9

$$\binom{19}{1}B_9-\binom{19}{3}\frac{3617}{510}+\binom{19}{5}\frac{7}{6}-\binom{19}{7}\frac{691}{2730}+\binom{19}{9}\frac{5}{66}-\binom{19}{11}\frac{1}{30}+\binom{19}{13}\frac{1}{42}-\binom{19}{15}\frac{1}{30}+\binom{19}{17}\frac{1}{6}-\left(9-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{19!}{1!\times18!}B_9-\frac{19!}{3!\times16!}\frac{3617}{510}+\frac{19!}{5!\times14!}\frac{7}{6}-\frac{19!}{7!\times12!}\frac{691}{2730}+\frac{19!}{9!\times10!}\frac{5}{66}-\frac{19!}{11!\times8!}\frac{1}{30}+\frac{19!}{13!\times6!}\frac{1}{42}-\frac{19!}{15!\times4!}\frac{1}{30}+\frac{19!}{17!\times2!}\frac{1}{6}-\frac{17}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_9}=\frac{\mathbf{43867}}{\mathbf{798}}$$

Cálculo de B_{10}

$$\binom{21}{1}B_{10}-\binom{21}{3}\frac{43867}{798}+\binom{25}{5}\frac{3617}{510}-\binom{25}{7}\frac{7}{6}+\binom{21}{9}\frac{691}{2730}-\binom{21}{11}\frac{5}{66}+\binom{21}{13}\frac{1}{30}-\binom{21}{15}\frac{1}{42}+$$
$$+\binom{21}{17}\frac{1}{30}-\binom{21}{19}\frac{1}{6}+\left(10-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{21!}{1!\times20!}B_{10}-\frac{21!}{3!\times18!}\frac{43867}{798}+\frac{21!}{5!\times16!}\frac{3617}{510}-\frac{21!}{7!\times14!}\frac{7}{6}+\frac{21!}{9!\times12!}\frac{691}{2730}-\frac{21!}{11!\times10!}\frac{5}{66}+\frac{21!}{13!\times8!}\frac{1}{30}-\frac{21!}{15!\times6!}\frac{1}{42}+\frac{21!}{17!\times4!}\frac{1}{30}-\frac{21!}{19!\times2!}\frac{1}{6}+\frac{19}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_{10}}=\frac{\mathbf{174611}}{\mathbf{330}}$$

Cálculo de B_{11}

$$\binom{23}{1}B_{11}-\binom{23}{3}\frac{174611}{330}+\binom{23}{5}\frac{43867}{798}-\binom{23}{7}\frac{3617}{510}+\binom{23}{9}\frac{7}{6}-\binom{23}{11}\frac{691}{2730}+\binom{23}{13}\frac{5}{66}-\binom{23}{15}\frac{1}{30}+$$
$$\binom{23}{17}\frac{1}{42}-\binom{23}{19}\frac{1}{30}+\binom{23}{21}\frac{1}{6}-\left(11-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{23!}{1!\times22!}B_{11}-\frac{23!}{3!\times20!}\frac{174611}{330}+\frac{23!}{5!\times18!}\frac{43867}{798}-\frac{23!}{7!\times16!}\frac{3617}{510}+\frac{23!}{9!\times14!}\frac{7}{6}-\frac{23!}{11!\times12!}\frac{691}{2730}+\frac{23!}{13!\times10!}\frac{5}{66}-\frac{23!}{15!\times8!}\frac{1}{30}+\frac{23!}{17!\times6!}\frac{1}{42}-\frac{23!}{19!\times4!}\frac{1}{30}+\frac{23!}{21!\times2!}\frac{1}{6}-\frac{21}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_{11}}=\frac{\mathbf{854513}}{\mathbf{138}}$$

Cálculo de B_{12}

$$\binom{25}{1}B_{12}-\binom{25}{3}\frac{854513}{138}+\binom{25}{5}\frac{174611}{330}-\binom{25}{7}\frac{43867}{798}+\binom{25}{9}\frac{3617}{510}-\binom{25}{11}\frac{7}{6}+$$
$$+\binom{25}{13}\frac{691}{2730}-\binom{25}{15}\frac{5}{66}+\binom{25}{17}\frac{1}{30}-\binom{25}{19}\frac{1}{42}+\binom{25}{21}\frac{1}{30}-\binom{25}{23}\frac{1}{6}+\left(12-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{25!}{1!\times24!}B_{12}-\frac{25!}{3!\times22!}\frac{854513}{138}+\frac{25!}{5!\times20!}\frac{174611}{330}-\frac{25!}{7!\times18!}\frac{43867}{798}+\frac{25!}{9!\times16!}\frac{3617}{510}-\frac{25!}{11!\times14!}\frac{7}{6}+\frac{25!}{13!\times12!}\frac{691}{2730}-\frac{25!}{15!\times10!}\frac{5}{66}+\frac{25!}{17!\times8!}\frac{1}{30}-\frac{25!}{19!\times6!}\frac{1}{42}+\frac{25!}{21!\times4!}\frac{1}{30}-\frac{25!}{23!\times2!}\frac{1}{6}+\frac{23}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_{12}}=\frac{\mathbf{236364091}}{\mathbf{2730}}$$

Cálculo de B_{13}

$$\binom{27}{1}B_{13}-\binom{27}{3}\frac{236364091}{2730}+\binom{27}{5}\frac{854513}{138}-\binom{27}{7}\frac{174611}{330}+\binom{27}{9}\frac{43867}{798}-\binom{27}{11}\frac{3617}{510}+\binom{27}{13}\frac{7}{6}-$$
$$\binom{27}{15}\frac{691}{2730}+\binom{27}{17}\frac{5}{66}-\binom{27}{19}\frac{1}{30}+\binom{27}{21}\frac{1}{42}-\binom{27}{23}\frac{1}{30}+\binom{23}{25}\frac{1}{6}-\left(13-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{27!}{1!\times 26!}B_{13}-\frac{27!}{3!\times 24!}\frac{236364091}{2730}+\frac{27!}{5!\times 22!}\frac{854513}{138}-\frac{27!}{7!\times 20!}\frac{174611}{330}+\frac{27!}{9!\times 18!}\frac{43867}{798}-\frac{27!}{11!\times 16!}\frac{3617}{510}+\frac{27!}{13!\times 14!}\frac{7}{6}-\frac{27!}{15!\times 12!}\frac{691}{2730}+\frac{27!}{17!\times 10!}\frac{5}{66}-\frac{27!}{19!\times 8!}\frac{1}{30}+\frac{27!}{21!\times 6!}\frac{1}{42}-\frac{27!}{23!\times 4!}\frac{1}{30}+\frac{27!}{25!\times 2!}\frac{1}{6}-\frac{25}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_{13}=\frac{8553103}{6}}$$

Cálculo de B_{14}

$$\binom{29}{1}B_{14}-\binom{29}{3}\frac{8553103}{6}+\binom{29}{5}\frac{236364091}{2730}-\binom{29}{7}\frac{854513}{138}+\binom{29}{9}\frac{174611}{330}-\binom{29}{11}\frac{43867}{798}+\binom{29}{13}\frac{3617}{510}-\binom{29}{15}\frac{7}{6}+\binom{29}{17}\frac{691}{2730}-\binom{29}{19}\frac{5}{66}+\binom{29}{21}\frac{1}{30}-\binom{29}{23}\frac{1}{42}+\binom{29}{25}\frac{1}{30}-\binom{29}{27}\frac{1}{6}+\left(14-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{29!}{1!\times 28!}B_{14}-\frac{29!}{3!\times 26!}\frac{8553103}{6}+\frac{29!}{5!\times 24!}\frac{236364091}{2730}-\frac{29!}{7!\times 22!}\frac{854513}{138}+\frac{29!}{9!\times 20!}\frac{174611}{330}-\frac{29!}{11!\times 18!}\frac{43867}{798}+\frac{29!}{13!\times 16!}\frac{3617}{510}-\frac{29!}{15!\times 14!}\frac{7}{6}+\frac{29!}{17!\times 12!}\frac{691}{2730}-\frac{29!}{19!\times 10!}\frac{5}{66}+\frac{29!}{21!\times 8!}\frac{1}{30}-\frac{29!}{23!\times 6!}\frac{1}{42}+\frac{29!}{25!\times 4!}\frac{1}{30}-\frac{29!}{27!\times 2!}\frac{1}{6}+\frac{27}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_{14}=\frac{23749461029}{870}}$$

Cálculo de B_{15}

$$\binom{31}{1}B_{15}-\binom{31}{3}\frac{23749461029}{870}+\binom{31}{5}\frac{8553103}{6}-\binom{31}{7}\frac{236364091}{2730}+\binom{31}{9}\frac{854513}{138}-\binom{31}{11}\frac{174611}{330}+\binom{31}{13}\frac{43867}{798}-\binom{31}{15}\frac{3617}{510}+\binom{31}{17}\frac{7}{6}-\binom{31}{19}\frac{691}{2730}+\binom{31}{21}\frac{5}{66}-\binom{31}{23}\frac{1}{30}+\binom{31}{25}\frac{1}{42}-\binom{31}{27}\frac{1}{30}+\binom{31}{29}\frac{1}{6}-\left(15-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{31!}{1!\times 30!}B_{15}-\frac{31!}{3!\times 28!}\frac{23749461029}{870}+\frac{31!}{5!\times 26!}\frac{8553103}{6}-\frac{31!}{7!\times 24!}\frac{236364091}{2730}+\frac{31!}{9!\times 22!}\frac{854513}{138}-\frac{31!}{11!\times 20!}\frac{174611}{330}+\frac{31!}{13!\times 18!}\frac{43867}{798}-\frac{31!}{15!\times 16!}\frac{3617}{510}+\frac{31!}{17!\times 14!}\frac{7}{6}-\frac{31!}{19!\times 12!}\frac{691}{2730}+\frac{31!}{21!\times 10!}\frac{5}{66}-\frac{31!}{23!\times 8!}\frac{1}{30}+\frac{31!}{25!\times 6!}\frac{1}{42}-\frac{31!}{27!\times 4!}\frac{1}{30}+\frac{31!}{29!\times 2!}\frac{1}{6}-\frac{29}{2}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B_{15}=\frac{8615841276005}{14322}}$$

Teniendo en cuenta que Spiegel & Ribero (1970), presentaron la Tabla 1 se comprueba lo obtenido y se continúa con el protocolo para calcular la alcalinidad del agua natural.

Tabla 1. Algunos de los primeros números de Bernoulli.

n	B_n
1	1/6
2	1/30
3	1/42
4	1/30
5	5/66
6	691/2 730
7	7/6
8	3 617/510

(Continúa Tabla 1)

(Continúa Tabla 1)

n	B_n
9	43 867/798
10	174 611/330
11	854 513/138
12	236 364 091/2 730

Protocolo para calcular la alcalinidad del agua natural por la integral aproximada de Simpson.

Los métodos más empleados de ellos se basan en el reemplazo de la función integrando por una suma finita, dividiendo en n partes iguales el intervalo de integración: $(b - a)$. Después se reemplaza en la fórmula de la parábola (o de Simpson), haciendo que $h = (b - a) / n$. El valor de n debe ser par y múltiplo de 4, donde a y b son los valores inferior y superior de integración, en las que se usaron las tres fórmulas de Simpson (Bronshtein & Semendiaev, 2018):

$$I = \int_a^b y dx \cong \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{y-1} + y_n\right)\ldots \text{ (2)}$$

$$II = \int_a^b y dx \cong \frac{2h}{3}\left(y_0 + 4y_2 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-2} + y_n\right)\ldots \text{ (3)}$$

Se puede considerar que:

$$\int_a^b y dx = I + \frac{I - II}{15}\ldots \text{ (4)}$$

Aspectos éticos

Los autores señalan que se cumplieron todos los aspectos éticos a nivel nacional e internacional.

RESULTADOS

Realizado el cálculo (mostrados anteriormente) de los 20 primeros números de Bernoulli presentados en la Tabla 2; se procedió a la aplicación evaluado la alcalinidad del agua. La primera aplicación corresponde a algunas integrales, como la integral de ln (*cosx*).

Tabla 2. Los veinte (20) primeros números de Bernoulli.

n	B_n
1	1/6
2	1/30
3	1/42
4	1/30
5	5/66
6	691/2 730
7	7/6
8	3 617/510
9	43 867/798
10	174 611/330
11	854 513/138
12	236 364 091/2 730
13	8 553 103/6
14	23 749 461 029/870
15	8 615 841 276 005/14 322
16	7 709 321 041 217/510
17	2 577 687 858 367/6
18	26 315 271 553 053 477 373/1 919 190
19	2 929 993 913 841 559/6
20	261 082 718 496 449 122 051/13 530

Aplicación a algunas integrales:

$$\int \frac{x}{sen(ax)} dx = \frac{1}{a^2}\left[ax + \frac{(ax)^3}{3\times 3!} + \frac{7(ax)^5}{3\times 5\times 5!} + \frac{31(ax)^7}{3\times 7\times 7!} + \ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n (ax)^{2n+1} + \ldots\right] \ldots \text{(a)}$$

$$\int xtg(ax)dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n a^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \text{(b)}$$

$$\int \frac{tg(ax)}{x}dx = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \ldots (c)$$

$$\int ln(\,tgx)dx = x\,ln\,x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots (d)$$

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{2^{2n-1}\times(2^{2n}-1)\times B_n\times x^{2n+1}}{n(2n+1)!} \ldots (e)$$

Aplicación de los números de Bernoulli (*Bn*).

Para la expresión $\int \ln(cosx)\,dx$ (e); se tiene:

- Para $B_1 = 1/6$

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6}$$

- Para: $B_1 = 1/6$ y $B_2 = 1/30$

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60}$$

- Para: $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30$ y $B_3 = 1/42$

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{210}$$

- Para: $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42$ y $B_4 = 1/30$

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{210} - \frac{17x^9}{22680}$$

- Para: $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42, B_4 = 1/30$ y $B_5 = 5/66$.

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{210} - \frac{17x^9}{22680} - \frac{31x^{11}}{311850}$$

- Para: $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42, B_4 = 1/30, B_5 = 5/66$ y $B_6 = 691/2730$.

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{210} - \frac{17x^9}{22680} - \frac{31x^{11}}{311850} - \frac{691x^{13}}{4455}$$

- Para: $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42, B_4 = 1/30, B_5 = 5/66, B_6 = 691/2730$ y $B_7 = 7/6$.

$$\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{210} - \frac{17x^9}{22680} - \frac{31x^{11}}{311850} - \frac{691x^{13}}{4455} - \frac{10922x^{15}}{638512875}$$

- Para: $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30, B_3 = 1/42, B_4 = 1/30, B_5 = 5/66, B_6 = 691/2730$, $B_7 = 7/6$ y $B_8 = 3617/510$.

$$\boldsymbol{\int \ln(cosx)\,dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{210} - \frac{17x^9}{22680} - \frac{31x^{11}}{311850} - \frac{691x^{13}}{4455} - \frac{10922x^{15}}{638512875} - \frac{929569x^{17}}{173675502000} - \cdots (5)};$$

y así, sucesivamente; se podría seguir aplicando los números de Bernoulli.

Determinación de la alcalinidad del agua natural, como *$CaCO_2$*(mg/l), para cantidades relativas de dióxido de carbono (*CO_2*) en función del pH, con los 6, 10 y 14 primeros números de Bernoulli.

La cantidad relativa del dióxido de carbono (CO_2) en función del pH se ha calculado (para los 6, 10 y 14 primeros números de Bernoulli) aplicando la ecuación **(6)** y sus correspondiente factores de rectificación y/o corrección.

$$\boldsymbol{CO_2} = \int_{\boldsymbol{pH_1}}^{\boldsymbol{pH_2}} \left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right) dpH \ldots \mathbf{(6)}$$

Factores de rectificación y/o corrección. Los tres factores de corrección (rectificación) están diseñados y formulados tal como siguen.

- **Con los 6 primeros números de Bernoulli.**

$$B_A = 1 - \frac{pH}{2} + \frac{B_1 pH^2}{2!} - \frac{B_2 pH^4}{4!} + \frac{B_3 pH^6}{6!} - \frac{B_4 pH^8}{8!} + \frac{B_5 pH^{10}}{10!} - \frac{B_6 pH^{12}}{12!} + \ldots$$

- **Con los 10 primeros números de Bernoulli.**

$$B_B = 1 - \frac{pH}{2} + \frac{B_1 pH^2}{2!} - \frac{B_2 pH^4}{4!} + \frac{B_3 pH^6}{6!} - \frac{B_4 pH^8}{8!} + \frac{B_5 pH^{10}}{10!} - \frac{B_6 pH^{12}}{12!} + \frac{B_7 pH^{14}}{14!} - \frac{B_8 pH^{16}}{16!} + \frac{B_9 pH^{18}}{18!} - \frac{B_{10} pH^{20}}{20!} + \cdots$$

- **Con los 14 primeros números de Bernoulli.**

$$B_C = 1 - \frac{pH}{2} + \frac{B_1 pH^2}{2!} - \frac{B_2 pH^4}{4!} + \frac{B_3 pH^6}{6!} - \frac{B_4 pH^8}{8!} + \frac{B_5 pH^{10}}{10!} - \frac{B_6 pH^{12}}{12!} + \frac{B_7 pH^{14}}{14!} - \frac{B_8 pH^{16}}{16!} + \frac{B_9 pH^{18}}{18!} - \frac{B_{10} pH^{20}}{20!} + \frac{B_{11} pH^{22}}{22!} - \frac{B_{12} pH^{24}}{24!} + \frac{B_{13} pH^{26}}{26!} - \frac{B_{14} pH^{26}}{26!} + \cdots$$

Velocidad de dióxido de carbono global, $(CO_2)_G$, del agua natural. El cambio de dióxido de carbono global, $(CO_2)_G$, en función del pH, fue determinado en el laboratorio de "Análisis y calidad de aguas", utilizando el método potenciométrico corroborado y contrastado por el método gráfico (Rodier, 1998); obteniendo los datos mostrados en las Tablas 3 y 4.

Tabla 3. Datos de variación de dióxido de carbono global, $d(CO_2)_G/dt$ en función del pH.

pH	$d(CO_2)_G/dpH$
3,2	554,00
3,3	332,00
3,4	199,00
3,5	119,00
3,6	72,00
3,7	43,00
3,8	26,00
3,9	16,00
4,0	10,00
4,1	6,00
4,2	3,60
4,3	2,30
4,4	1,33

$d(CO_2)_G/dt = 4758448489 \text{ x } e^{-4,9984 \text{x} pH}$

Con coeficiente de correlación de

r = -0,9999 ≅ - 1,00

La variación de dióxido de carbono real, $\left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right)_R$, está dada por:

$$d(CO_2)_G/dt \times B_A$$
$$d(CO_2)_G/dt \times B_B$$
$$d(CO_2)_G/dt \times B_C$$

El cálculo del dióxido de carbono (CO_2) por cada una de las series:

$$\left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right)_{AR} = 4758448489 e^{-4,9984 \times pH} \times B_A \ldots (7)$$

$$\left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right)_{BR} = 4758448489 e^{-4,9984 \times pH} \times B_B \ldots (8)$$

$$\left(\frac{d(CO_2)}{DpH}\right)_{CR} = 4758448489 e^{-4,9984 \times pH} \times B_C \ldots (9)$$

Tabla 4. Valores rectificados de la variación del dióxido de carbono (CO_2) en función del potencial de hidrógeno (pH), empleando los 6, 10 y 14 primeros números de Bernoulli.

pH	$\left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right)_{AR}$	$\left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right)_{BR}$	$\left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right)_{CR}$
3,2	73,1233	73,1906	73,1912
3,3	41,2009	41,2627	41,2633
3,4	23,1944	23,2506	23,2510
3,5	13,0440	13,0943	13,0948
3,6	7,3261	7,3707	7,3713
3,7	4,1078	4,1468	4,1474
3,8	2,2980	2,3318	2,3324
3,9	1,2815	1,3104	1,3111
4,0	0,7114	0,7360	0,7366
4,1	0,3924	0,4130	0,4137
4,2	0,2144	0,2315	0,2322
4,3	0,1155	0,1296	0,1303
4,4	0,0609	0,0724	0,0731

Alcalinidad del agua natural como $CaC0_2$,(mg/l) con B_A , B_B y B_C .

Alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l) con B_A, B_B y B_C.

- **Con B_A (seis primeros números de Bernoulli)**

$(CO_2)_{ARI} = \int_a^b \left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right) dpH \cong \frac{0,1}{3}(73,1233 + 4(41,2009) + 2(23,1944) + 4(13,0440) + \cdots + 4(0,1155) + 0,0609) = 12,7080$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/L)

$(CO_2)_{ARII} = \int_a^b \left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right) dpH \cong \frac{2(0,1)}{3}(73,1233 + 4(23,1944) + 2(7,3261) \ldots + 4(0,2144) + 0,0609) = 12,8058$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

$$(CO_2)_{AR} = (CO_2)_{ARI} + \frac{(CO_2)_{ARI} - (CO_2)_{ARII}}{15} = 12,7080 + \frac{12,7080 - 12,8058}{15}$$

$(CO_2)_{AR} = 12,7015$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

- **Con B_B (diez primeros números de Bernoulli)**

$(CO_2)_{BRI} = \int_a^b \left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right) dpH \cong \frac{0,1}{3}(73,1906 + 4(41,2627) + 2(23,2506) + 4(13,0943) + \cdots + 4(0,1296) + 0,0724) = 12,7510$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

$(CO_2)_{BRII} = \int_a^b \left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right) dpH \cong \frac{2(0,1)}{3}(73,1906 + 4(23,2506) + 2(7,3707) \ldots + 4(0,2315) + 0,0724) = 12,8488$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

$$(CO_2)_{BR} = (CO_2)_{BRI} + \frac{(CO_2)_{BRI} - (CO_2)_{BRII}}{15} = 12,7510 + \frac{12,7510 - 12,8488}{15}$$

$(CO_2)_{BR} = 12,7445$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

- **Con B_C (catorce primeros números de Bernoulli)**

$(CO_2)_{CRI} = \int_a^b \left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right) dpH \cong \frac{0,1}{3}(73,1912 + 4(41,2633) + 2(23,2510) + 4(13,0948) + \cdots + 4(0,1303) + 0,0731) = 12,7518$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

$(CO_2)_{CRII} = \int_a^b \left(\frac{d(CO_2)}{dpH}\right) dpH \cong \frac{2(0,1)}{3}(73,1912 + 4(23,2510) + 2(7,3713) \ldots + 4(0,2322) + 0,0731) = 12,8495$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

$$(CO_2)_{CR} = (CO_2)_{CRI} + \frac{(CO_2)_{CRI} - (CO_2)_{CRII}}{15} = 12,7518 + \frac{12,7518 - 12,8495}{15}$$

$(CO_2)_{CR} = 12,7454$ alcalinidad del agua natural como $CaCO_2$, (mg/l)

DISCUSIÓN

La calidad del agua natural fue determinada mediante la alcalinidad, propiedad que está provocada por la presencia de carbonatos y bicarbonatos de elementos como calcio y magnesio; donde los más comunes son el bicarbonato de calcio ($Ca(HCO_3)_2$) y el bicarbonato de magnesio ($Mg(HCO_3)_2$); respectivamente, y teniendo presente que la alcalinidad ayuda a regular los cambios de pH producidos por la adición ácidos y es una medida de la capacidad del agua para neutralizar ácidos; al examinar las curvas de titulación de un ácido fuerte como el ácido sulfúrico (H_2SO_4) (Vega *et al.*, 2017).

La alcalinidad del agua natural, en forma de carbonato de calcio $CaCO_2(mg/l)$, midiendo en cantidades relativas el dióxido de carbono (CO_2) en función del pH se observa que tienen carácter asintótico (Sierra & Gómez, 2020; Zamora *et al.*, 2020). El cambio que experimentan las concentraciones de algunas sustancias, como el dióxido de carbono (CO_2) en aguas naturales en función del pH tienen carácter asintótico y se comportan como funciones en series de potencias; dando lugar a que, en la cuantificación de la alcalinidad se utilicen los números de Bernoulli (Sierra & Gómez, 2020). El comportamiento del dióxido de carbono (CO_2) en el agua natural que varía en función del pH muestra un proceso asintótico y la integral aproximada de Simpson (o parabólico) se puede utilizar adecuadamente, donde en el procesos final los valores de la alcalinidad resultan despreciables (Urbina *et al.*, 2022).

Los números de Bernoulli son la menor relación posible entre dos números primos entre sí, coincidiendo con lo que mencionado por la literatura (Vera, 1960; Fernández, 2012), y que los números de Bernoulli tienen numerosas aplicaciones dentro del campo de la matemática aplicada, del análisis matemático y de la ingeniería ambiental (Ruíz, 2016).

Los números de Bernoulli son todos positivos, descienden hasta el de posición tres y a partir del cuatro crecen indefinidamente (Dover Publications, 1965). Dentro de las conclusiones se tiene que la $\int \ln(cosx)dx$ se puede representar de forma indefinida por los números de Bernoulli, en la que todos sus términos tienen signo negativo, que se pueden observar en la ecuación (5). Se puede calcular la alcalinidad del agua natural en forma de $CaCO_2(mg/l)$, para cantidades relativas de dióxido de carbono (CO_2) en función del pH aplicando los números de Bernoulli hasta el de posición catorce (14) y aplicando las formas de las integrales aproximadas de Simpson; los valores alcalímetros del agua natural empleando los 6, 10 y 14 primeros números de Bernoulli fueron de 12,7015; 12,7445 y 12,7454 $CaCO_2$, (mg/l); respectivamente. La variación de dióxido de carbono global, $d(CO_2)_G/dt$, en función del pH es una expresión exponencial, donde el coeficiente de determinación r^2 x 100 = 100%; que estima, prácticamente, una correlación perfecta.

Una propiedad fundamental del agua natural tal como es la alcalinidad puede ser calculada en forma de carbonato de calcio $CaCO_2$, (mg/l) por medio del dióxido carbono (CO_2) en función del potencial de hidrógeno (pH) utilizando los números de Bernoulli y aplicando el criterio de integral aproximada de Simpson.

Author contributions: **CRediT (Contributor Roles Taxonomy)**

OMM = Olegario Marín-Machuca
FAAZ = Fredy Aníbal Alvarado-Zambrano
JBVA = Jessica Blanca Vargas-Ayala

JIOG = Julia Iraida Ortiz-Guizado
LGJA = Luis Germán Jáuregui-del-Águila
RAAZ = Ricardo Arnaldo Alvarado-Zambrano
UMS = Ulert Marín-Sánchez
JECD = José Eduardo Candela-Díaz
AQQ = Alexander Quispe-Quispe
OMS = Obert Marín-Sánchez

Conceptualization: OMM, OMS, AQQ, JECD
Data curation: RAAZ, OMS, UMS
Formal Analysis: OMM, JECD, AQQ
Funding acquisition: AQQ, JECD, FAAZ
Investigation: OMM, JBVA, OMS
Methodology: OMM, UMS, LGJA
Project administration: UMS, AQQ, JBVA
Resources: JIOG, JBVA, LGJA
Software: JBVA, OMS, JECD
Supervision: OMM, AQQ, JECD, FAAZ
Validation: OMM, JIOG, AQQ
Visualization: OMM, JBVA, LGJA
Writing – original draft: OMM, JBVA, OMS
Writing – review & editing: OMM, UMS, JIOG

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benton, W. (1964). *Enciclopedia Británica.* Tomo III. Incorporated. Impreso en Estados Unidos. USA.

Bronshtein, I., & Semendiaev, R. (2018). *Manual de Matemática para ingenieros y estudiantes.* Ed. Mir. Moscú.

Boyer, C. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Editorial Alianza S.A.

Courant, R., & Fritz, J. (2015). Series Trigonométricas en *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Editorial Limusa. Vol. 1, Cap. 8.

Child, J. (2017). *The early mathematical manuscripts of Leibnitz.* Ed. The Open Publishing Company.

Dover Publications. (1965). *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Abramowitz, M., & Irene A. Stegun, I.A. (eds.).

Fernández, B. (2012). *Números de Bernoulli: Un estudio sobre su importancia, consecuencias, y algunas aplicaciones en la Teoría de los Números*. [Tesis para obtener el título de Licenciado en Física y Matemáticas con especialidad en Matemáticas]. Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas.

Kim, T., Kim, D.S., Kim, H.K., & Lee, H. (2022). Some properties on degenerate Fubini polynomials. *Applied Mathematics in Science and Engineering, 30*, 235-248.

Komatsu, T., & Pita-Ruiz, C. (2020): Poly-Cauchy numbers with level 2, Integral Transforms and Special Functions. *Integral Transforms and Special Functions, 31*, 570-585.

Küçükoğlu, İ., Şimşek, B. & Şimşek, Y. (2020). New classes of Catalan-type numbers and polynomials with their applications related to p-adic integrals and computational algorithms. *Turkish Journal of Mathematics, 44*, 27.

Marín-Machuca, O. (2003). *Historia de la Matemática y los Grandes Exponentes*. Editorial VPA-UTP.

Martínez, O., Domínguez-Sales, M., & Gambau, M.F. (2014). Antecedentes históricos de la construcción de los logaritmos en *La construcción de los logaritmos: Historia y proyecto Didáctico*. Universidad de León.

Rodier J. (1998) *Análisis de las aguas. Aguas naturales, aguas residuales y agua de mar*. Ed. Omega, S. A.

Ruíz, A.I. (2016). *Teoría de los Números*. Editorial San Marcos.

Sierra, A., y Gómez, L. (2020). *Determinación de la influencia del diámetro, velocidad de chorro y caudal con diferentes alturas en la descarga vertical de fluidos por orificios con perfiles de entrada y salida*. Unidades Tecnológicas de Santander.http://repositorio.uts.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/2460.

Simmons, G.F. (1998). *Ecuaciones Diferenciales: con aplicaciones y notas históricas*. Segunda edición. McGraw-Hill/Interamericana de España.

Spiegel, M. R., & Ribero, O. G. (1970). *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Ed. McGraw-Hill INC.

Urbina, R., Danducho, J., Chiclote, S., Incio, F., Baldera, N., Fernández, R., Quispe, C., Guzmán, G., Cárdenas, M., & Castro, D. (2022). *Métodos numéricos aplicados al cálculo hidráulico en canales de regadío de Bagua. Revista de Investigación Científica Dekamu Agropec*, *3*, 20-34.

Vega, C.F., Gallegos, L.C., & Flores, C.F. (2017). Dificultades conceptuales para la comprensión de la ecuación de Bernoulli. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 14*, 339-352.

Vera, F. (1960). *Matemática y Números*. Edit. Kapelusz.

Zamora, R., Brown, O., & Balbón, P. (2020). *El balance energético en tuberías simples aplicado a la Ingeniería Hidráulica. Universidad y Ciencia, 9*, 2227-2690.

Received August 14, 2023.

Accepted October 15, 2023.