

# Directa identificación de sistemas lineales a partir de fitting sobre integrales de convolución

## Direct Identification of Linear Systems from Fitting on Integral Convolution

Juan Tisza Contreras,<sup>1</sup> Huber Nieto Chaupis<sup>2</sup>

### Resumen

*Se realiza un estudio de identificación de sistemas no lineales enfatizando el uso de integrales de convolución que en una primera instancia podría describir aproximadamente la dinámica del sistema bajo estudio. Este estudio apunta a adquirir un cierto conocimiento de la dinámica de un circuito de moliendas de bolas, cuyo fin es la de optimizar el tamaño de la partícula del mineral que tendría que ser eficientemente reducido a un tamaño necesario para posteriores etapas del procesamiento del mineral. Una consecuencia directa a partir del uso del fitting es que podemos extraer directamente la función de transferencia y con esto obtener información de la estabilidad del sistema.*

### Palabras claves

*Convolución, estabilidad del sistema, fitting*

### Abstract

*We performed a study of identification of nonlinear systems emphasizing the use of convolution integral in the first instance could describe approximately the dynamics of the system under study. This study aims to acquire some knowledge of the dynamics of a ball grinding circuit, which aims to optimize the particle size of the ore would be effectively reduced to a size needed for later stages of mineral processing. A direct consequence from the use of fitting is that we can directly extract the transfer function and thereby obtain information from the system stability.*

### Key words

*Convolution, system stability, fitting*

<sup>1</sup> Ingeniero. Docente URP  
<sup>2</sup> Doctor. Docente UTP

## Introducción

En muchos modelos de control avanzado, la identificación del sistema resulta ser de importancia ya que para mantener al sistema durante su evolución temporal en un fijo set point es muy necesario implementar en el modelo del control un algoritmo que contenga la identificación del sistema basado en un modelo matemático continuo o discreto. Por ejemplo, en el control de la partícula del grano del mineral como ocurre en los procesos de mineral en los complejos mineros, la molienda de bolas cumple el rol individual dentro del ciclo de procesamiento la de triturar la carga de mineral entrante conjuntamente con su volumen de agua asociado. Una vez que la molienda ha reducido el grano del mineral a un tamaño óptimo, éste pasa a través del sumidero que vuelve a ser humedecido para luego ir a otro nivel como es el paso por los hidrociclones. En esta estación de procesamiento, una fracción de la carga vuelve al circuito convirtiéndose así en la carga circulante. Esta masa regresa como carga entrante a la molienda y tiene efecto negativo cuando su peso es del mismo orden que la carga bruta de mineral. En el caso que la molienda se sobresature por la presencia de carga circulante, el aborto sobre la funcionalidad del circuito sería evidente. Para entender las posibles ventajas y desventajas de las principales propiedades del sistema de circuitos de moliendas, en este estudio se va a enfatizar el uso de la técnica de fitting en datos adquiridos en una planta para luego aplicarlo en los escenarios más representativos de plantas de circuito de moliendas que operan bajo estándares de productividad. El presente reporte se concentra en el modelo matemático que apunta a extraer la información dinámica del sistema durante su evolución temporal. En esencia, se va a enfocar el procedimiento para obtener los retrasos en las diferentes variables que definen el sistema de molienda.

## Planteamiento del Problema

En un circuito de moliendas de bolas existe un orden muy bien definido y se puede describir como sigue: en un tiempo inicial  $T_1$  entra a la molienda dos tipos de masas: la de agua y la de mineral bruto (osea mineral más componentes irrelevantes para procesamiento). Después de un tiempo  $T_2$  la masa es mezclada y su composición ha cambiado notablemente por acción de la trituración de las bolas metálicas dentro de la molienda y se expulsa a los contenedores o también llamados sumideros. En este punto es importante recalcar que existen límites ya que la cantidad de masa que se vierte a los sumideros no debe sobrepasar una altura geométrica determinada. Luego, la masa es nuevamente humedecida para luego pasar la decisión si va a un posterior procesamiento o regresa al circuito en un tiempo  $T_3$ . Finalmente, en un tiempo  $T_4$  la carga o masa circulante entra a la molienda en adición a la carga bruta y el agua. Así, los tiempos  $T_1$  al  $T_4$  van a determinar los intervalos temporales por las cuales el sistema evoluciona en función de sus variables u observables físicas.

Un paso importante es la de establecer los inputs y los outputs del sistema. Como fue descrito en su paper [1], X. S. Chen ya ha advertido que solamente un análisis multivariable puede ser relevante para entender situaciones complejas como la dinámica de la molienda. En este estudio vamos a definir como los inputs a las siguientes variables: el agua, la carga bruta de mineral y el agua diluyente que sirve para humedecer la pulpa de mineral después de su expulsión de la molienda; mientras que los outputs: el tamaño de partícula, la carga circulante y la altura geométrica del sumidero. Por ejemplo la evolución temporal del radio de la partícula va a depender estrictamente de los tres inputs en la forma de integral de convolución:

$$(1) \quad R_p(t_1) = \int_0^{t_1} h_{11}(\zeta - t)R_m(\zeta)d\zeta + \int_0^{t_2} h_{12}(\zeta - t)R_a(\zeta)d\zeta + \int_0^{t_3} h_{13}(\zeta - t)R_d(\zeta)d\zeta$$

donde se asume que los inputs actúan linealmente independientes uno del otro [2]. En (1) las funciones  $h_{1j}$  con  $j=1,3$  denotan las respectivas funciones de transferencia, mientras que  $R_m$ ,  $R_a$  y  $R_d$  los inputs: el mineral, el agua y el agua diluyente. Al aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de (1), se obtiene

$$R_p(s) = H_1(s)H_1(s) + H_2(s)H_2(s) + H_3(s)H_3(s)$$

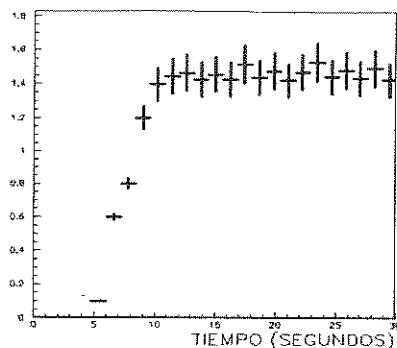
donde  $H(s)R(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t h(\zeta - t)R(\zeta)d\zeta\right\}$  se ha aplicado a la ecuación (1) dando la expresión en el espacio de Laplace. Para atacar el problema de identificación de la evolución temporal del tamaño de la partícula del grano minero, iniciamos la discusión para el caso más simple y que envuelve únicamente el input dado por el flujo de agua a la molienda. Consecuentemente, se lleva a la generalización como se manifiesta en (1).

### Identificación en el Caso SISO

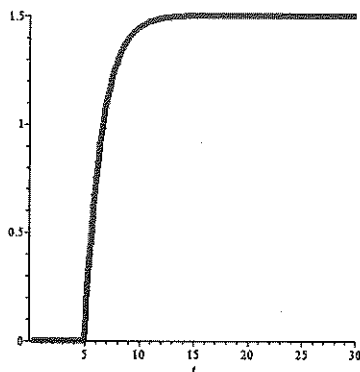
Por simplicidad y para la identificación del sistema se va a requerir de la expresión

$$(3) \quad R_p(t) = \int_0^{t_2} h_{12}(\zeta - t)R_a(\zeta)d\zeta$$

que es el segundo término del lado derecho de (1) y que se interpreta que la evolución temporal del tamaño de la partícula  $R_p(t)$  depende de la convolución de la función de transferencia  $h_{12}$  con la función input  $R_a$  que denota el agua entrando a la molienda. Este el caso SISO (simple input - simple output). Se observa que la integral está definida hasta un tiempo  $t_2$  que es el tiempo en donde el agua será un input independiente. Demostrando que (3) se ajusta a un conjunto de datos, se puede generalizar a todos los términos de (1) con el fin de demostrar la hipótesis que la ecuación (1) puede ser utilizado para identificar el sistema. En la figura 1 se muestra los datos digitalizados obtenidos de la referencia 1. Notar que estos datos muestran la evolución temporal y que solamente toma en cuenta un impulso escalón por acción del agua después de 5 segundos que entra con un volumen normalizado, es decir no consideramos a escala la cantidad real de peso que entra a la molienda. De la figura 1 se observa además a manera cualitativa un comportamiento aleatorio después de 10 segundos. Este comportamiento estocástico podría tener cierto perjuicio en la identificación del sistema.



**Figura 1.** Datos adquiridos de la referencia (1) mostrando la evolución temporal del radio de la partícula cuando se aplica un impulso escalón por efecto del agua. La curva está normalizada.



**Figura 2.** Curva de identificación obtenida con MAPLESOFT usando la ecuación 4. Notar que el tiempo entre los primeros 5 segundos y el tiempo donde el sistema es estable es del orden de 7 segundos.

Para identificar directamente el sistema a partir de los datos mostrados en la figura 2, vamos a aplicar la técnica de convolución como se muestra en la ecuación 3. Para este fin usamos el software MAPLESOFT [3] que lleva a cabo la integración de convolución resultando en la figura 2. La discrepancia entre los datos y la integración por MAPLESOFT del 2.5% siendo aún aceptable. La integral resultante se escribe como

$$(4) \quad R_p(t) = \int_0^{t_2} u(\zeta - t) \text{Exp}^{-\left(\frac{t-\zeta}{G}\right)} R_a(\zeta - T) d\zeta$$

donde  $u(\zeta - t) \text{Exp}^{-\left(\frac{t-\tau}{G}\right)}$  denota la función de transferencia mientras que  $R_a(\zeta - T)$  la función escalón que toma lugar en los primeros  $T$  segundos. Para aproximar (4) con la figura 1 se ha usado  $G=1.5$  y  $T=5$  segundos. Ahora aplicando la transformada de Laplace a la función de transferencia, se obtiene:

$$(5) \quad H(s) = \frac{50 \text{Exp}^{0.36-3s}}{50s+9}$$

que denota una función retrasada y estable en el polo en el espacio  $s$ . La obtención de (5) a partir del uso del *fitting* se valida por el hecho que  $H(s)$  se ajusta directamente al caso bajo estudio.

### Full Identificación en el Caso MIMO con Interacción de Variables.

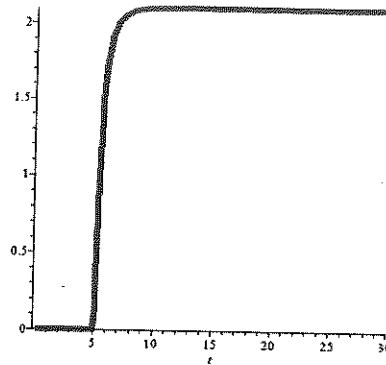
Ahora vamos a considerar el caso que los datos van a depender directamente de las tres variables de entrada más la interacción entre la carga circulante y el agua cuando los volúmenes respectivos entran a la molienda. La propuesta de convolución se escribe de la siguiente forma:

$$(6) \quad R_p(t_1) = \int_0^{t_1} h_{11}(\zeta - t)R_m(\zeta)d\zeta + \int_0^{t_2} h_{12}(\zeta - t)R_a(\zeta)d\zeta \\ + \int_0^{t_2} h_{12}(\zeta - t)R_a(\zeta)d\zeta \int_0^{t_4} h_{cc}(\zeta' - t)R_c(\zeta')d\zeta' + \int_0^{t_3} h_{13}(\zeta - t)R_d(\zeta)d\zeta$$

en donde se ha reescrito la ecuación (1) más el término que lleva información de la interacción y que es la multiplicación de dos integrales de convolución. En la ecuación (6) se denota la contribución de la carga circulante como  $\int_0^{t_4} h_{cc}(\zeta - t)R_c(\zeta) d\zeta$  donde queda claro que la función input  $R_c(\zeta)$  no es de naturaleza escalón a diferencia de los reales inputs que si obedecen a una morfología matemática dada por la función escalón evidentemente. Un concepto importante que estamos introduciendo en este análisis es la de definir que el producto de integrales de convolución dado por

$$(7) \quad \int_0^{t_2} h_{12}(\zeta - t)R_a(\zeta)d\zeta \int_0^{t_4} h_{cc}(\zeta' - t)R_c(\zeta')d\zeta'$$

se convierta en un integral de convolución conteniendo una funcional random cuasi estocástica. Aunque implementar este criterio en la práctica resulta tedioso desde el punto de vista computacional, el uso de algoritmos avanzados de integración en el plano complejo pueden ser usados. En la figura 3 se muestra el resultado de integración usando la ecuación 6. La curva se aproxima a un escalón lo que tendría positivos efectos para poder ser usado en modelos de control como MPC ya que se ha degradado la presencia de fluctuaciones y perturbaciones que podrían aparecer en la evolución temporal del radio de la partícula. Por otro lado, los robustos sistemas de control necesitarían de modelos matemáticos que muestren que el set point se mantenga estable a pesar de la confluencia de interacciones y otras manifestaciones de la dinámica que encierra el circuito de moliendas. Esto tiene impacto en la relación costo-beneficio como se ha discutido en la referencia [4].



**Figura 3.** Curva de identificación usando MAPLESOFT usando la ecuación 6. Notar que esta curva describe muy aproximadamente una función escalón sin la crítica presencia de fluctuaciones. Notar que el sistema es estable a partir de los primeros 8 segundos.

## CONCLUSIONES

En este reporte se ha demostrado que el uso directo de la una integral de convolución puede dar información de las propiedades del sistema a través de un fitting a los datos adquiridos en planta. Esta técnica se extiende a casos reales de sistemas SISO aun más conteniendo interacciones entre las variables. La idea de este trabajo en un corto futuro será la de implementar en hardwares los algoritmos basados en las ecuaciones (1-7).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] XI-SONG CHEN, ET.AL.,: Application of model predictive control in ball mil grinding circuit", Miner. Eng. 20 (2007) 1099-1108.
- [2] JUAN TISZA: Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Ingeniería, submitida 2011.
- [3] El software se obtiene de la siguiente web: <http://www.maplesoft.com>.
- [4] WEI, D., CRAIG, I.K., Grinding mill circuits — a survey of control and economic concerns. Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Elsevier, Korea, 2008