

Aplicaciones del filtrado adaptivo utilizando el algoritmo Least Mean Square

Applications of adaptive filtering algorithm using the Least Mean Squqre

Pedro Freddy Huamaní Navarrete¹

Resumen

En este artículo se presenta algunas aplicaciones utilizando los filtros variantes en el tiempo, en particular haciendo uso del algoritmo Least Mean Square (LMS). Tales aplicaciones serán mostradas a partir de simulaciones realizadas en el software de computación científica Matlab. Asimismo, las simulaciones fueron programadas utilizando los propios algoritmos del filtro adaptivo, y evitando el uso de los comandos o funciones encontrados en los diferentes toolboxes que cuenta dicho software. De esta manera, este artículo tiene como finalidad brindar al lector la facilidad en la comprensión del código computacional básico de un filtro adaptivo, que utiliza el algoritmo least mean square (LMS), lo cual le servirá posteriormente para migrar a cualquier otro lenguaje de programación de su preferencia. Dentro de las aplicaciones seleccionadas, se abordan los casos de predicción, identificación de sistemas y cancelación de interferencia, de una manera simple y sintetizada.

Palabras claves

Filtro adaptivo, Least Mean Square, algoritmo, Matlab.

Abstract

This article presents some applications using time-varying filters, in particular making use of the Least Mean Square algorithm (LMS). Such applications will be shown from simulations in scientific computing software Matlab. Furthermore, the simulations were programmed using the adaptive filter algorithms themselves, and avoiding the use of commands and functions found in various counts such software toolboxes. Thus, this article aims to provide the reader with ease in understanding the basic computer code of an adaptive filter that uses the least mean square algorithm (LMS), which will serve later to migrate to any other programming language of your choice. In selected applications, are discussed cases predictive, identification of interference cancellation systems and, in a simple and synthesized.

Key words

Adaptive filtering, Least Mean Square algorithm, Matlab

Introducción

La evolución de la era digital y el descubrimiento de una variedad de herramientas matemáticas, ha traído consigo que el procesamiento digital de señales venga utilizándose en diversos sectores de nuestra actualidad con la finalidad de brindarnos, por un lado, soluciones a los tantos problemas que nos agobia, y por el otro facilitarnos el quehacer diario al ofrecernos productos con alta tecnología. Es así que es posible encontrar variedades de aplicaciones en el sector médico, militar, comercial, educacional, industrial, entre otros.

Una de las principales herramientas que ofrece el procesamiento digital de señales es el filtrado digital. Se entiende por filtro digital como aquel sistema que es implementado en base a un algoritmo computacional, con la finalidad de eliminar o atenuar una o varias componentes de frecuencia de una señal. Así podemos citar los casos de filtros pasa-bajos, pasa-altos, pasa-bandas, elimina-bandas, multi-bandas, etc.

En cuanto a los filtros digitales, existen diversas formas de clasificarlos. Algunos autores de libros en dicha materia lo hacen de manera particular. Sin embargo, muchos coinciden en clasificar a los filtros digitales como: filtros invariantes al tiempo y variantes al tiempo, y donde este último también es conocido como filtros adaptivos. A su vez, es posible encontrar clasificaciones referentes a la respuesta del impulso. Tal es el caso de filtros digitales no recursivos o FIR (respuesta finita al impulso), y filtros digitales recursivos o IIR (respuesta infinita al impulso).

Por lo tanto un filtro adaptivo o filtro con coeficientes variantes al tiempo puede ser a su vez recursivo o no recursivo.² Particularmente, en este artículo se abordará solo el caso de un filtro adaptivo del tipo no recursivo que hace uso del algoritmo Least Mean Square (LMS). Se darán los conceptos fundamentales y necesarios, a la vez se citarán las principales aplicaciones, y asimismo algunas simulaciones basadas en problemas típicos que serán desarrollados en un algoritmo computacional en la plataforma del Matlab. Cabe resaltar que no se utilizarán los comandos o funciones que ofrece este software en sus variados toolboxes, sino más bien se orientará al uso de una programación computacional básica que facilite mas adelante su migración a otros lenguajes de programación.

De esta forma, a través del presente artículo, se otorgará la base para la solución de problemas sencillos utilizando la teoría del filtrado adaptivo. Es decir, la intención de este trabajo es proporcionar al estudiante de pregrado de la carrera de ingeniería, el concepto principal del filtro adaptivo utilizando el algoritmo LMS para que no solamente lo comprenda, sino también para que lo complemente y lo utilice como una herramienta en el desarrollo de su tesis o de proyectos de investigación.

ASPECTOS TEÓRICOS

Seguidamente se definen algunos aspectos teóricos que son utilizados en el desarrollo de este artículo.

Filtro digital adaptivo

Un filtro adaptivo, o filtro con coeficientes variables en el tiempo, se define como un sistema digital que incorpora algún mecanismo de adaptación por el cual sus coeficientes son ajustados o como también optimizados. Dicho mecanismo de adaptación usualmente incorpora un algoritmo que evalúa los valores instantáneos de los coeficientes o pesos del filtro, de tal forma que la función error de la ecuación 01 sea minimizada.³

$$e[n] = d[n] - y[n] \quad (01)$$

Donde:

$d[n]$, es la señal deseada.

$y[n]$, es la señal de salida del filtro.

El diagrama de bloques de la figura 01 muestra una representación general de un filtro digital adaptivo.

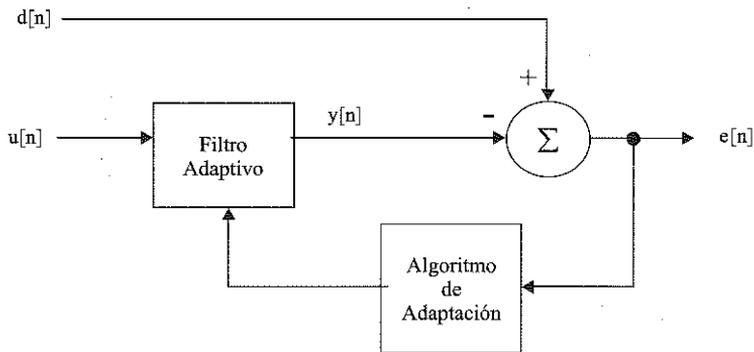


Figura 01. Diagrama de bloques general de un filtro digital adaptivo.

Estructura de un filtro adaptivo

La estructura más comúnmente utilizada por los filtros adaptivos del tipo no recursivo, es la denominada estructura transversal y puede ser apreciada en la figura 02. En ella es posible observar la señal de entrada $u[n]$, la señal de salida $y[n]$ y la señal o respuesta deseada $d[n]$.⁴ La señal de salida $y[n]$ es generada a partir de una combinación lineal de las muestras desfasadas de la señal de entrada $u[n]$, tal como lo muestra la ecuación 02.

3 Antoniou Andreas, 2000. Digital Filters: analysis, design and applications.
 4 Farhang-Boroujeny B. Adaptive Filters. Theory and applications.

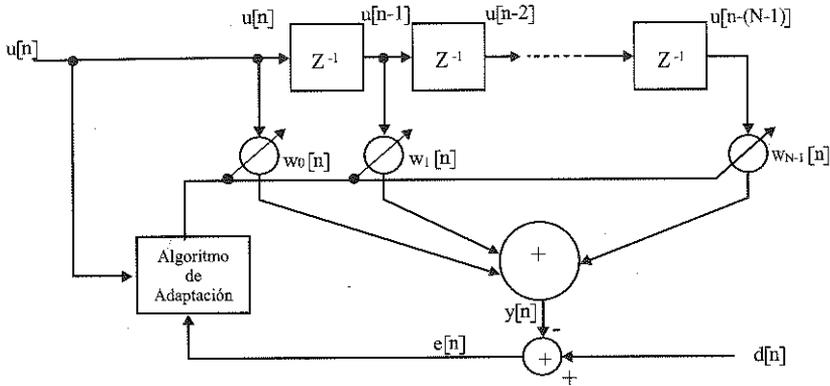


Figura 02. Estructura transversal de un filtro adaptivo.

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} w_i[n] u[n-i] \quad (02)$$

Donde:

$w_i[n]$, son los pesos o coeficientes del filtro digital adaptivo.

N , es el número de pesos o coeficientes del filtro adaptivo.

$u[n-i]$, representa las muestras desfasadas de la señal de entrada.

Algoritmo Least Mean Square

El algoritmo Least Mean Square (LMS) fue propuesto por Widrow and Hoff en 1960, y desde entonces es el algoritmo de filtrado adaptivo más ampliamente utilizado, en la práctica.⁵ Esto se atribuye a la simplicidad en su implementación, y robustez en cuanto a estadística de señales se refiere.

De la ecuación 02, anteriormente indicada, se puede observar que la salida del filtro adaptivo se obtiene a partir de una combinación lineal de los pesos de dicho filtro y la propia señal de entrada desfasada. Asimismo, de la ecuación 01, se observa la forma de obtención de la señal de error; la cual se obtiene a partir de la diferencia entre la señal deseada, $d[n]$, y la señal de salida obtenida de la ecuación 02, $y[n]$. Por lo tanto, el objetivo del algoritmo LMS es cambiar o adaptar los pesos tal que la señal de error, $e[n]$, sea minimizada en el sentido medio cuadrático, de ahí el nombre de Least Mean Square. Sin embargo, es necesario aclarar que cuando las señales $d[n]$ y $u[n]$ sean conjuntamente estacionarias, el algoritmo convergirá a un grupo de pesos, en promedio, que serán iguales a la solución de la ecuación de Wiener-Hopf.⁵

Como el algoritmo LMS convencional es una implementación estocástica del algoritmo gradiente descendente, entonces la actualización de los coeficientes del filtro se realiza en base a la ecuación 03 que tiene un comportamiento recursivo.⁵

5 Farhang-Boroujeny B. Adaptive Filters. Theory and applications.

$$w[n+1] = w[n] + (2\mu)(e[n]u[n]) \quad (03)$$

Donde:

- $w_i[n]$, son los actuales coeficientes del filtro adaptivo.
- $w_i[n+1]$, son los nuevos coeficientes del filtro adaptivo.
- $e_i[n]$, representa a la señal de error.
- $u[n]$, representa a la señal de entrada.
- μ , representa al tamaño de paso y es un número real.

De esta forma, la convergencia de los pesos del filtro adaptivo a un valor óptimo así como la velocidad con la que converge, dependerá del tamaño de paso elegido para el parámetro μ . Pues, la elección de un tamaño de paso largo puede causar la divergencia de la ecuación recurrente anteriormente mostrada.⁵

Seguidamente, en la figura 03, se muestra un resumen del algoritmo LMS para la adaptación de los coeficientes de un filtro adaptivo.

Entradas:

- Vector inicial de coeficientes : $w[n]$*
- Vector de entrada : $u[n]$*
- Salida deseada : $d[n]$*

Salidas:

- Salida del filtro : $y[n]$*
- Vector de coeficientes actualizado : $w[n+1]$*

1. *Filtrado : $y[n] = w^T[n]u[n]$*
2. *Estimación del error : $e[n] = d[n] - y[n]$*
3. *Adaptación de los coeficientes del filtro. : $w[n+1] = w[n] + (2\mu)(e[n]u[n])$*

Figura 03. Resumen del algoritmo LMS.

Principales aplicaciones

La destreza de un filtro adaptivo para operar de forma satisfactoria en un ambiente desconocido y asimismo realizar un seguimiento de una señal de entrada variante en el tiempo, hacen que el filtro adaptivo sea un dispositivo potente para aplicaciones de procesamiento de señales y control de procesos.⁶ Por tal razón, los filtros adaptivos vienen utilizándose en diferentes sectores tales como los de análisis vibracional, comunicaciones, sismología, ingeniería biomédica, radar, sonar, entre otras.

Todas estas aplicaciones son diferentes por naturaleza, sin embargo poseen características comunes que son: el vector de entrada y la respuesta o salida deseada, los cuales permitirán el cálculo de la estimación del error que a su vez controlará los valores de los coeficientes de un filtro ajustable.⁶

Por lo tanto, en esta sección se señalan tres clases de aplicaciones de filtrado adaptivo con sus respectivos diagramas de bloques.

1. Identificación.

Muchos sistemas físicos resultan difíciles de ser modelados, es decir de ser representados mediante ecuaciones matemáticas, Por tal razón, el uso de filtros adaptivos nos da la opción de representar un sistema desconocido a través de un modelamiento lineal. El diagrama de bloques de la figura 04 nos muestra una representación de este tipo de aplicación, donde la entrada $u[n]$ es común tanto para el filtro adaptivo como para el sistema desconocido. De esta manera, la señal obtenida a la salida del filtro adaptivo será comparada con una señal deseada $d[n]$, la cual dará origen a una señal de error que a través de un algoritmo de adaptación, actualizará los pesos de dicho filtro.

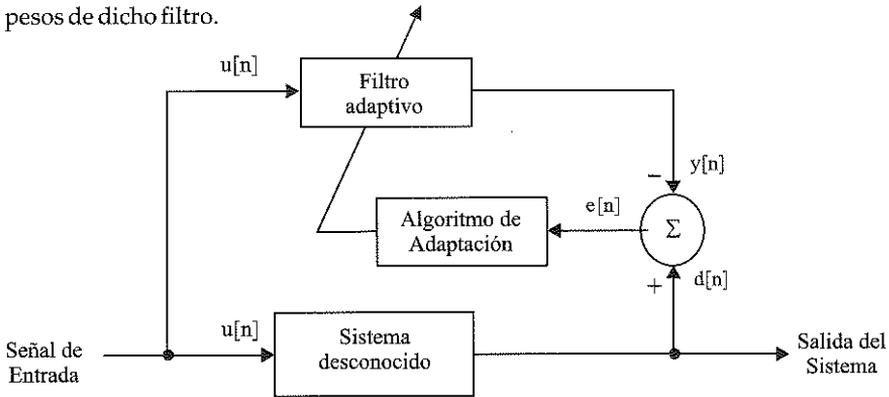


Figura 04. Diagrama de bloques del modelo de identificación.

2. Predicción.

Este tipo de aplicación se refiere al uso del filtro adaptivo con finalidad de predecir o estimar, en el mejor sentido, algunas muestras posteriores de una señal discreta en el tiempo. Así, la figura 05 representa a un diagrama de bloques del modelo de estimación o predicción, donde la señal o respuesta deseada, $d[n]$, está representada por el valor actual de la señal a predecir. Mientras que la señal de entrada al filtro adaptivo, $u[n]$, corresponde a los valores pasados de la señal en mención.

Dependiendo de la aplicación de interés, la salida del filtro adaptivo o el error de estimación representará la salida del sistema. En un primer caso el sistema operará como un predictor, y en el segundo caso lo hará como un filtro predictor de error.⁷

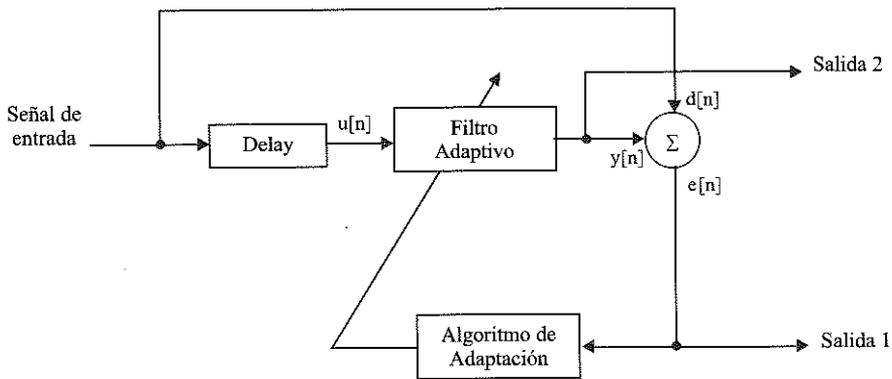


Figura 05. Diagrama de bloques del modelo de predicción⁷

3. Cancelación de interferencia.

En esta última aplicación, el filtro adaptivo es utilizado para cancelar, en cierto sentido, una interferencia desconocida contenida en una señal primaria. Dicha señal corresponderá a la salida deseada, $d[n]$, mientras que la señal de referencia que ingresará al filtro adaptivo, $u[n]$, es derivada de un grupo de sensores localizados en relación a los sensores que alimentan la señal primaria. En la figura 06 se observa el diagrama de bloques del modelo de cancelación de interferencia, indicándose cada una de las señales que participan en dicha aplicación.

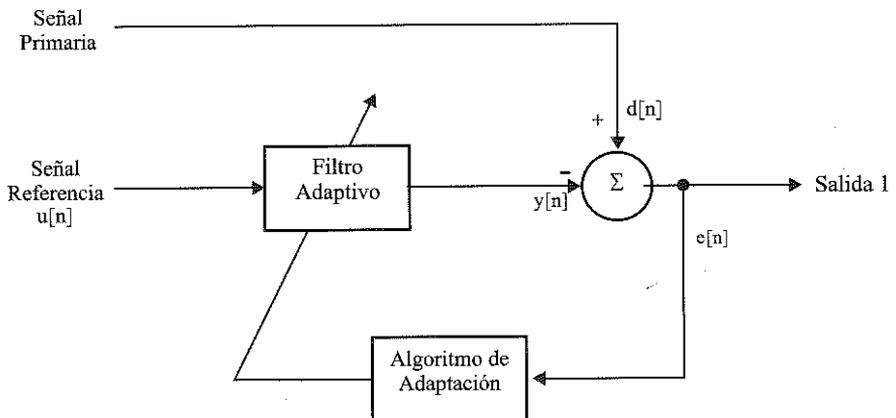


Figura 06. Diagrama de bloques del modelo de cancelación de interferencia.⁸

Implementación del Modelo

En esta sección se presenta la implementación de un ejemplo por cada modelo de filtro adaptivo citado. Tales implementaciones son simuladas y programadas algorítmicamente bajo el lenguaje de programación del software Matlab. Posteriormente se muestran los resultados obtenidos en forma gráfica.

1. Aplicación de Identificación: filtro pasa-alto.

Esta aplicación tiene como objetivo demostrar la identificación de un sistema. Por ello, con la finalidad de verificar el desempeño del filtro diseñado, se opta por elegir en vez de un sistema desconocido, uno conocido. Este sistema conocido se refiere a un filtro no recursivo del tipo pasa alto, de orden 36, frecuencia de corte de 250 Hz y frecuencia de muestreo de 2000 Hz. Asimismo, se elije como señal de entrada, $u[n]$, una señal de ruido con media cero y varianza igual a uno, y como señal deseada, $d[n]$, se opta por utilizar la salida del sistema conocido y propuesto.

```

>> M = 10000; %tamaño del vector de entrada
>> Fs = 2000;
>> h = fir1(36, 250/(Fs/2), 'high');
>> u = rand(1,M);
>> u = (u - mean(u))/std(u);
>> d = filter(h, 1, u);
>> N = 33; %núm. Coefic. del filtro adaptivo
>> mu = 0.005; %tamaño del paso
>> y = zeros(1,M); %salida del filtro adaptivo
>> e = y;
>> w = [0.1 zeros(1,N-1)]; %coefic. iniciales del filtro
>> indice = 0:-1:-N+1;
>> for n = N:M %algoritmo iterativo
    U = u(n+indice); %re-ordenando las muestras
    y(n) = U*w;
    e(n) = d(n) - y(n);
    w = w + (2*mu*e(n)*U);
end
>> [H1, W] = freqz(h, 1, 1024, Fs); %rpta. frec. del filtro conocido
>> [H2, W] = freqz(w, 1, 1024, Fs); %rpta. frec. del filtro adaptivo
>> mH1 = 20*log10(abs(H1));
>> mH2 = 20*log10(abs(H2));
>> fH1 = unwrap(angle(H1));
>> fH2 = unwrap(angle(H2));
>> subplot(2,1,1)
>> plot(W, mH1, 'r', W, mH2, '--b'), grid
>> xlabel('Frecuencia (Hz)')
>> ylabel('Magnitud (dB)')
>> legend('Magnitud del Filtro Conocido', 'Magnitud del Filtro Identificado');
>> subplot(2,1,2)
>> plot(W, fH1, 'r', W, fH2, '--b'), grid %ver figura 07
>> xlabel('Frecuencia (Hz)')
>> ylabel('Fase (°)')
>> legend('Fase del Filtro Conocido', 'Fase del Filtro Identificado');
>> w1 = w %coeficientes del filtro adaptivo

```

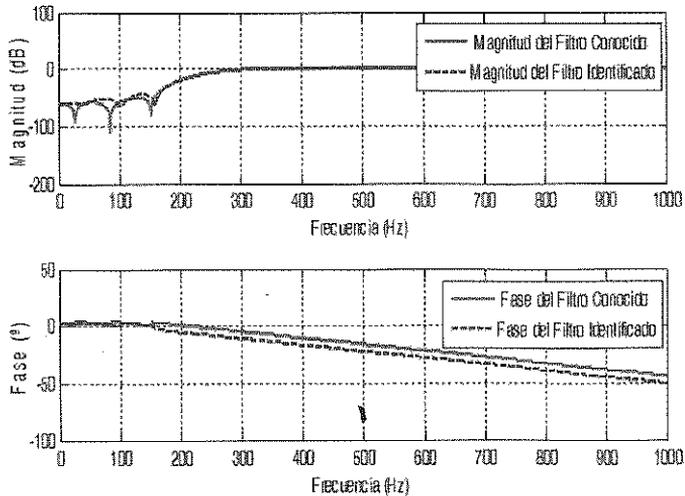


Figura 07. Respuesta en frecuencia del filtro conocido y del filtro identificado.

2. Aplicación de Predicción: estimación de señal periódica.

Para comprobar la eficiencia del filtrado adaptivo en una aplicación de predicción, se opta por utilizar una señal periódica compuesta por la suma de una onda coseno y una seno como señal deseada, $d[n]$, y como señal de entrada al filtro, $u[n]$, la versión desfasada de la señal $d[n]$. El número de coeficientes utilizados por el filtro fue igual a 4, lo cual representó el número de muestras utilizadas para lograr la estimación uno y dos pasos adelante después de la 999ava muestra.

```

>> N = 6; %núm. de coef. del filtro adaptivo
>> Fs = 1000;
>> t = linspace(0,1,Fs);
>> mu = 0.002; %tamaño del paso
>> x = 0.5*sin(2*pi*5*t) + 0.5*cos(2*pi*7.5*t); %muestras no utilizadas
>> M = 1; %señal. deseada
>> d = [x(1:Fs - M)]; %señal de entrada al filtro
>> u = [zeros(1,N-1) d];
>> y = zeros(1,length(u)-N+1);
>> w = [zeros(1,N)]; %iniciando coef. del filtro adaptivo.
>> indice = 0:-1:-N+1;
>> for n = N:length(u) - (M+1) %algoritmo iterativo
    U = u(n+indice); %re-ordenando las muestras
    y(n-(N-1)) = U * w;
    e(n-(N-1)) = d(n-(N-1)+1) - y(n-(N-1));
    w = w + (2*mu*e(n-(N-1))*U);
end
>> subplot(211), plot(e), grid
>> title('Señal de error estimada e[n]')
>> subplot(212), plot(t(1:Fs-2-M), y(1:Fs-2-M), '-r', t(1:Fs-M), d), grid
>> title('Comparación entre señal deseada y estimada')
>> legend('Señal estimada y[n]', 'Señal deseada d[n]');
>> xlabel('Tiempo') %ver figura 08
>> w2 = w;
    
```

3. Aplicación de cancelación de interferencia: eliminación de ruido en onda periódica.

La aplicación de cancelación de interferencia es mostrada con una simulación donde la señal de entrada, $u[n]$, está representada por una señal de ruido con media igual a cero y varianza igual a uno. Por otro lado, la señal deseada, $d[n]$, está representada por la suma de la misma señal de ruido más una onda coseno de 2 Hz y una onda cuadrada de 5 Hz.

```
>> N = 11; %núm. de coef. del filtro adaptivo
>> Fs = 1000;
>> t = linspace(0,1,Fs);
>> r = rand(1,Fs);
>> r = (r - mean(r)) / std(r); %haciendo media=0 y varianza=1
>> mu = 0.002; %tamaño del paso
>> x = square(2*pi*5*t) + cos(2*pi*2*t);
```

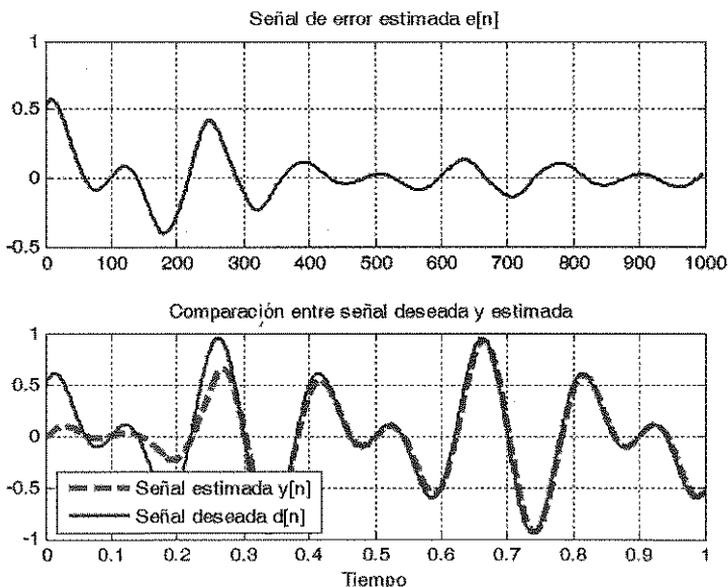


Figura 08. Arriba: señal de error estimada $e[n]$. Abajo: comparación entre señal deseada y estimada.

```
>> d = [r+x zeros(1,N-1)]; %señal. deseada
>> u = [zeros(1,N-1) r]; %señal de entrada al filtro
>> y = zeros(1,length(u));
>> w = zeros(1,N); %iniciando coef. del filtro adaptivo.
>> indice = 0:-1:-N+1;
>> for n = N : length(u)-N %algoritmo iterativo
    U = u(n+indice); %re-ordenando las muestras
    y(n-(N-1)) = U * w';
    e(n-(N-1)) = d(n-(N-1)) - y(n-(N-1));
    w = w + (2*mu*e(n-(N-1))*U);
end
```

```

>> subplot(311),
>> plot( linspace(0,1,length(d)), d)           %señal deseada
>> title(' Señal deseada: d[n] ')
>> grid
>> subplot(312),
>> t1 = linspace(0,1,length(e));
>> plot( t1, e, '-r', t, x, 'b' )           %señal d[n]-y[n] Vs. original
>> grid
>> legend(' Interferencia cancelada', 'Señal d[n] - y[n] ');
>> subplot(313),
>> plot( t, x-e(1:Fs) ),                   %señal de ruido
>> title(' Ruido: señal e[n] - señal real x[n]')
>> xlabel(' Tiempo '), grid
>> E = e;
>> w3 = w
%ver figura 09.
%coeficientes del filtro adaptivo
    
```

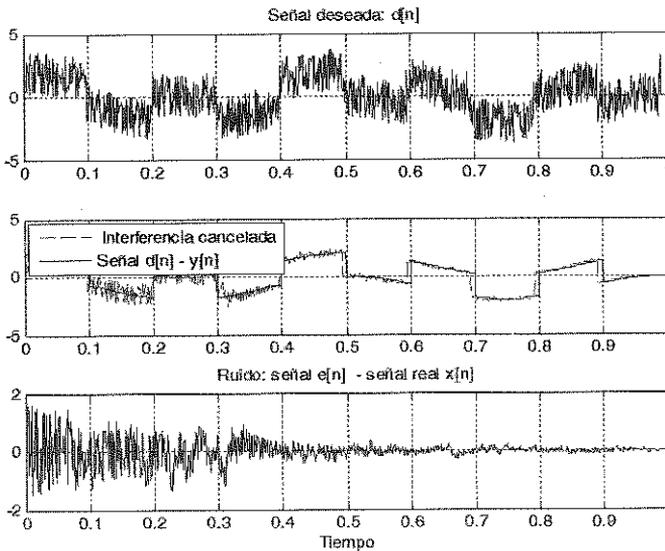


Figura 09. Arriba: señal deseada: coseno, cuadrada y ruido. Centro: señal con cancelación de interferencia. Abajo: ruido inicial.

RESULTADOS

Realizadas las simulaciones correspondientes a cada uno de los modelos de aplicación de filtrado adaptivo, se llega a los siguientes resultados.

1. En referencia al uso del filtrado adaptivo para la identificación de sistemas desconocidos, los resultados obtenidos fueron satisfactorios en cuanto a los coeficientes del filtro adaptado. A pesar de haber utilizado un sistema conocido con orden 36 en vez de uno desconocido, se logró obtener un filtro adaptivo de menor orden (32) y con buena aproximación en el dominio de la frecuencia.

```
>> NN = 1024;                                % muestras de la T.D.Fourier
>> W1 = abs(fft(w1, NN));
>> H1 = abs(fft(h, NN));
>> sumsqr(W1' - H1)
ans =
    0.0058
```

2. Relacionado al uso del filtro adaptivo con fines de estimación, se observó un gran desempeño por parte de dicho filtro. Este desempeño se midió comparándose la señal predicha o estimada versus la señal deseada o real para la muestra 1000.

```
>> Fs = 1000;
>> t = linspace(0, 1, Fs);
>> d = 0.5*sin(2*pi*5*t) + 0.5*cos(2*pi*7.5*t);
>> y1 = u(1004:-1:999) * w2';
>> sumsqr(d(1000) - y1)
ans =
    0.0012
```

3. Finalmente, en la aplicación de cancelación de interferencia, la señal error $e[n]$ que supuestamente representa a la señal libre de ruido, no le fue eliminado totalmente el ruido sumado inicialmente. Por tal razón, dicha señal de error, $e[n]$, presenta una proximidad a la señal real representada por la suma de las ondas coseno de 2 Hz y cuadrada de 5 Hz. En esta aplicación se eligió un filtro adaptivo de orden 10 con 11 coeficientes, logrando una aceptable cancelación de interferencia cuando se realizó la comparación con las muestras correspondientes a: 900 a 990.

```
>> Fs = 1000;
>> ER = E(900:Fs-10);
>> t = linspace(0, 1, Fs);
>> x = square(2*pi*5*t) + cos(2*pi*2*t);
>> x1 = x(900:Fs-10);
>> sumsqr(ER - x1)
ans =
    0.2222
```

DISCUSIÓN

Actualmente, se cuenta con una amplia variedad de algoritmos para la actualización o adaptación de los coeficientes de un filtro adaptivo, desde los más simples hasta los más robustos. Sin embargo, su elección dependerá mucho de la naturaleza de la aplicación a desarrollar, así como de la designación de las señales de entrada y de salida deseada que participan en el algoritmo. Esto quiere decir que además del algoritmo adaptivo LMS, existen otros algoritmos más robustos que traen consigo un mejor desempeño aunque ya no resultan tan fáciles de ser implementados o como también consumen un mayor tiempo computacional. Entre algunos de ellos podemos citar: el algoritmo LMS normalizado, el algoritmo RLS (recursivo least square), el filtro de Kalman, entre otros.⁹

CONCLUSIONES

Entre las conclusiones más resaltantes de este trabajo, citamos las siguientes:

- El algoritmo de adaptación de coeficientes del filtro adaptivo es simple de implementar en cualquier lenguaje de programación. Es así que su programación en la ventana de edición del Matlab se realizó en forma resumida y directa.
- La elección del tamaño de paso, μ , juega un papel importante cuando se desea lograr una convergencia total por parte de los coeficientes del filtro adaptivo. Esto quiere decir, que una equivocada elección de dicho parámetro, puede traer consigo resultados inútiles.
- De la misma manera, la elección del número de coeficientes del filtro adaptivo, resulta de mucha importancia cuando se trata problemas de predicción e identificación de sistemas desconocidos. Muchas veces, considerar un número elevado de coeficientes para el filtro adaptivo, resulta innecesario y peor aún cuando no se llega a satisfacer los requerimientos de la operación de filtrado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- OPPENHEIM, ALAN V. & SCHAFER, RONALD W. "Discrete-time Signal Processing". Editorial Prentice Hall. 1989.
- RAMIREZ DINIZ, BARROS DA SILVA E LIMA NETTO. "Processamento Digital de Sinais. Projeto e Análise de Sistemas". Editorial Bookman. Brasil. 2004.
- BOZIC S. M. "Digital and Kalman Filtering. An introduction to discrete-time filtering and optimum linear estimation". Segunda edición. 1994.
- FARHANG-BOROJENY B. "Adaptive Filters. Theory and applications". National University of Singapore. 1998
- SIGNAL PROCESSING TOOLBOX. Versión R2009a. The MathWorks Inc. 2009.
- HAYKIN SIMON. "Adaptive Filter Theory". Cuarta edición. Editorial Prentice Hall. 2001.
- ANTONIOU ANDREAS. "Digital Filters: analysis, design, and applications". Segunda Edición. McGraw - Hill, Inc. Singapore. 2000.
- PROAKIS JOHN & MANOLAKIS DIMITRIS. "Tratamiento Digital de Señales". Editorial Prentice Hall. 1998.