

CONSTRUCCIÓN DE UNA HERRADURA CON MEDIDA DE LEBESGUE POSITIVA

Joel MENDOZA JIMENEZ

Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Científica del Sur - Perú
joel.mendoza@pucp.pe

RESUMEN

En este artículo, se estudia la construcción de una herradura con medida de Lebesgue positiva, esta herradura es edificada de manera análoga a la herradura de Smale. La diferencia es que la herradura de Smale tiene medida de Lebesgue cero presentando caos, que desde el punto de vista probabilístico podría ser despreciable, sin embargo al construir la herradura con medida positiva vemos que no lo es.

PALABRAS CLAVE

Conjunto hiperbólico, Herradura, Espacio de dos símbolos, conjunto de Cantor, medida de Lebesgue.

CONSTRUCTION OF A HORSESHOE WITH POSITIVE LEBESGUE MEASURE

ABSTRACT

In this article, the construction of a horseshoe is studied with positive Lebesgue measure, this horseshoe is built by analogy to the way Smale horseshoe. The difference is that the Smale horseshoe has zero Lebesgue measure introducing chaos that from the point of view probabilistic could be negligible, however when constructing the horseshoe with positive measure we see that it is not.

KEYWORDS

Hyperbolic set, Horseshoe, Space of two symbols, Cantor set, Lebesgue measure.

Recibido: 23/04/2020
Aprobado: 29/06/2020

1. Introducción

En el presente trabajo tratamos con conjuntos hiperbólicos, en el caso continuo esto se presenta cuando la matriz jacobiana asociada a una función presenta sus autovalores son positivos y negativos, en este caso al punto fijo se llama punto fijo hiperbólico, vea [10]. Aquí trataremos con conjuntos hiperbólicos es decir que en cada punto del conjunto el espacio tangente posee una descomposición en suma directa de dos subespacios invariantes, ver definición 2.1, un ejemplo de este tipo de conjuntos es la herradura de Smale este conjunto se construye de la siguiente manera:

Sea una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que consiste de dos regiones semicirculares D_1, D_5 unidas al cuadrado unitario $R = D_2 \cup D_3 \cup D_4$. (Ver figura 2).

Sea $f : D \rightarrow D$ una función diferenciable que envía D en la herradura como se muestra en la figura 2. También se asume que f estira $D_1 \cup D_4$ uniformemente en la dirección horizontal por un factor $\mu > 2$ y contrae uniformemente en la dirección vertical por $0 < \lambda < 1/2$. Desde que $f(D_5) \subset D_5$, entonces el Teorema de punto fijo de Brouwer garantiza la existencia de un punto fijo $p \in D_5$.

Sea $R_0 = f(D_2) \cap R$ y $R_1 = f(D_4) \cap R$. Además se nota que $f(R) \cap R = R_0 \cup R_1$. El conjunto $f^2(R) \cap f(R) \cap R = f^2(R) \cap R$ consiste de cuatro rectángulos horizontales $R_{ij}, i, j \in \{0, 1\}$, de altura λ^2 (ver figura 3). De manera general, para alguna sucesión finita $\omega_0, \dots, \omega_n$ de ceros y unos, se tiene

$$R_{\omega_0 \dots \omega_n} = R_{\omega_0} \cap f(R_{\omega_1}) \cap \dots \cap f^n(R_{\omega_n})$$

es un rectángulo horizontal de altura λ^n , y $f^n(R) \cap R$ es la unión de 2^n de estos rectángulos.

Para una sucesión infinita $\omega = (\omega_i) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$, con $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, sea $R_\omega = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(R_{\omega_i})$.

El conjunto $H^+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(R) = \bigcup_{\omega} R_\omega$ es el producto de un intervalo de longitud 1 y un conjunto de Cantor vertical el cual se denota por C^+ . Además la proyección de $f^n(R) \cap R$ al eje vertical tiene longitud $(2\lambda)^n$. También se tiene que $f(H^+) = H^+$.

De manera análoga se construye H^- usando preimágenes. Se observa que $f^{-1}(R_0) = f^{-1}(R) \cap D_2$, y $f^{-1}(R_1) = f^{-1}(R) \cap D_4$, son rectángulos verticales de ancho μ^{-1} , además la proyección de $f^{-n}(R) \cap R$ al eje horizontal tiene longitud $(\frac{2}{\mu})^n$. Para alguna sucesión finita $\omega_{-m}, \dots, \omega_{-1}$ de ceros y unos, se tiene $\bigcap_{i=1}^m f^{-i}(R_{\omega_i})$ es un rectángulo vertical de ancho μ^{-m} , y $H^- = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-i}(R)$ es el producto de un intervalo vertical de longitud 1 y un conjunto de Cantor horizontal denotado por C^- . Luego el conjunto herradura es definido por:

$$H = H^+ \cap H^- = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i(R)$$

es el producto de dos conjuntos de Cantor C^- con C^+ , es cerrado y f -invariante. Además mediante una conjugación con el espacio de dos símbolos se puede que:

- a) Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos.
- b) Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.
- c) Una órbita densa.

La manera de construir la herradura de Bowen, es decir una herradura con medida de Lebesgue positiva, es completamente análoga a la construcción

de la herradura de Smale. La diferencia radica que en el proceso de obtener conjuntos de Cantor se retiran intervalos de distintas longitudes. El hecho de que la herradura de Bowen sea construida de la misma manera que la de Smale implica que posee las mismas propiedades que esta.

La herradura de Bowen también presenta caos, luego desde un punto de vista probabilístico ya no es desechable pues esta herradura tiene medida de Lebesgue positiva.

2. Materiales y métodos

Definición 2.1. Un conjunto invariante tiene **estructura hiperbólica** para un difeomorfismo f en M si:

- (i) En cada punto $p \in \Lambda$, se cumple $T_p M = \mathbb{E}_p^u \oplus \mathbb{E}_p^s$, el espacio tangente a M se descompone como la suma de \mathbb{E}_p^u y \mathbb{E}_p^s .
- (ii) Esta descomposición es invariante mediante la aplicación derivada en el sentido que $Df_p(\mathbb{E}_p^u) = E_{f(p)}^u$ y $Df_p(\mathbb{E}_p^s) = E_{f(p)}^s$.
- (iii) Existen $0 < \lambda < 1$ y $C \geq 1$ independientes de p tales que $\forall n \geq 0$,

$$\begin{aligned} |Df_p^n v^s| &\leq C\lambda^n |v^s|, \quad \forall v^s \in \mathbb{E}_p^s, \quad y \\ |Df_p^{-n} v^u| &\leq C\lambda^n |v^u|, \quad \forall v^u \in \mathbb{E}_p^u. \end{aligned}$$

Si el conjunto invariante Λ tiene estructura hiperbólica para f . También se dice que Λ es un **conjunto (invariante) hiperbólico**.

Observación 2.2. Con la hipótesis dadas en la definición 2.1 para el conjunto hiperbólico, se sigue que \mathbb{E}_p^u y \mathbb{E}_p^s varían continuamente con p , (ver [3]). En términos de conos, la continuidad puede expresada como sigue: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(p, q) < \delta$, entonces

$$\mathbb{E}_q^u \subset C_p^u(\epsilon) = \{v^u + v^s : v^u \in \mathbb{E}_p^u, v^s \in \mathbb{E}_p^s, \|v^s\| \leq \epsilon \|v^u\|\}.$$

Ver página 267 de [12].

Ejemplo 2.3 (Punto fijo hiperbólico). Si se supone que Λ se reduce a un punto p , se tiene que $f(p) = p$ y $D_p f$ es un isomorfismo de $T_p M$ en si mismo. En este caso existirá la división hiperbólica si todos los autovalores de $D_p f$ tienen módulo distinto de 1.

Ejemplo 2.4 (Órbita periódica hiperbólica). Sea Λ una órbita periódica; $\Lambda = \{p_1, \dots, p_k\}$; $f(p_i) = p_{i+1} \pmod k$, $k \geq 2$. Entonces se tiene

$$TM_\Lambda = (T_{p_1} M \cup \dots \cup T_{p_k} M).$$

Una descomposición hiperbólica de TM_Λ es una descomposición hiperbólica de los espacios tangentes de M en cada punto de la órbita es decir,

$$\begin{aligned} T_{p_i} M &= \mathbb{E}_{p_i}^s \oplus \mathbb{E}_{p_i}^u \\ Tf(\mathbb{E}_{p_i}^s) &= \mathbb{E}_{p_{i+1}}^s \pmod k; \\ Tf(\mathbb{E}_{p_i}^u) &= \mathbb{E}_{p_{i+1}}^u \pmod k. \end{aligned}$$

En este ejemplo se tienen las siguientes observaciones:

- (1) Df^k es un automorfismo en cada $T_{p_i} M$.
- (2) Existe una descomposición hiperbólica en TM_Λ si y solo si cada p_i es un punto fijo hiperbólico para f^k .

Definición 2.5. Se dice que un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de clase C^1 es **Anosov**, si M es un conjunto hiperbólico para f .

En la siguiente sección se presenta un difeomorfismo de Anosov.

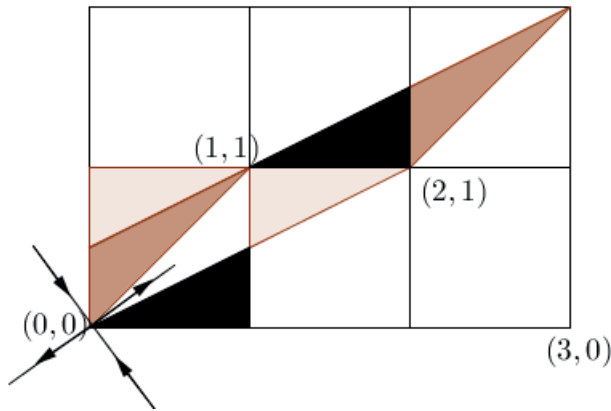
3. Una aplicación lineal hiperbólica en el toro

Sea la aplicación lineal de \mathbb{R}^2 dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2 > 1$ y $1/\lambda$. La aplicación expande por λ en la dirección del autovector $v_\lambda = ((1 + \sqrt{5})/2, 1)$, y se contrae por $1/\lambda$ en la dirección del autovector $v_{1/\lambda} = ((1 - \sqrt{5})/2, 1)$.

Figura 1: La imagen del toro bajo A (página 14 del libro [2])



Los autovectores son perpendiculares puesto que la matriz es simétrica.

Desde que A tiene entradas enteras, entonces preserva $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ e induce una aplicación del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, en si mismo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \end{array}$$

La aplicación \bar{A} está definida por

$$\bar{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x_1 + x_2) \bmod 1 \\ (x_1 + x_2) \bmod 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(ver figura 1). \mathbb{T}^2 es un conjunto invariante para \bar{A} porque A tiene autovalores uno mayor que 1 y el otro menor que 1, además A^{-1} tiene entradas enteras (esto es porque $\det(A) = 1$ y A tiene entradas enteras).

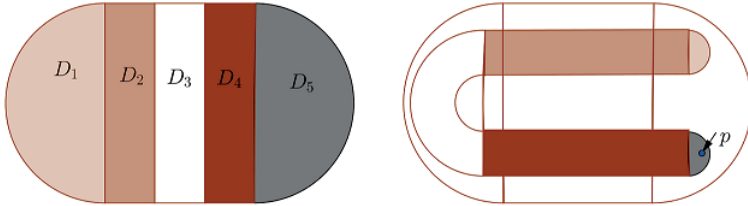
Por lo tanto \bar{A} es un difeomorfismo de Anosov para \mathbb{T}^2 . (2)

Además se observa que los puntos periódicos de $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ son los puntos con coordenadas racionales. Por lo tanto se obtiene la siguiente proposición

4. La herradura de Smale

4.1. Sea una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que consiste de dos regiones semicirculares D_1, D_5 unidas al cuadrado unitario $R = D_2 \cup D_3 \cup D_4$. (Ver figura 2)

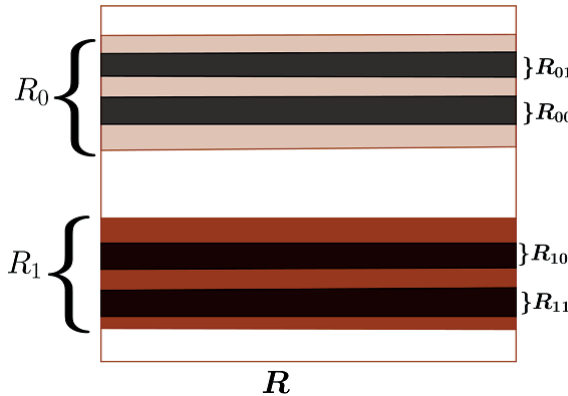
Figura 2: La función herradura (página 15 del libro [2])



Sea $f : D \rightarrow D$ una función diferenciable que envía D en la herradura como se muestra en la figura 2. También se asume que f estira $D_1 \cup D_4$ uniformemente en la dirección horizontal por un factor $\mu > 2$ y contrae uniformemente en la dirección vertical por $0 < \lambda < 1/2$. Desde que $f(D_5) \subset D_5$, entonces el Teorema de punto fijo de Brouwer garantiza la existencia de un punto fijo $p \in D_5$.

Sea $R_0 = f(D_2) \cap R$ y $R_1 = f(D_4) \cap R$. Además se nota que $f(R) \cap R = R_0 \cup R_1$. El conjunto $f^2(R) \cap f(R) \cap R = f^2(R) \cap R$ consiste de cuatro rectángulos horizontales $R_{ij}, i, j \in \{0, 1\}$, de altura λ^2 (ver figura 3).

Figura 3: Rectángulos horizontales (página 16 del libro [2])



De manera general, para alguna sucesión finita $\omega_0, \dots, \omega_n$ de ceros y unos, se tiene

$$R_{\omega_0 \dots \omega_n} = R_{\omega_0} \cap f(R_{\omega_1}) \cap \dots \cap f^n(R_{\omega_n})$$

es un rectángulo horizontal de altura λ^n , y $f^n(R) \cap R$ es la unión de 2^n de estos rectángulos.

Para una sucesión infinita $\omega = (\omega_i) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$, con $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, sea $R_\omega = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(R_{\omega_i})$.

El conjunto $H^+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(R) = \bigcup_{\omega} R_{\omega}$ es el producto de un intervalo de longitud 1 y un conjunto de Cantor vertical (Un conjunto de cantor es un conjunto compacto, perfecto, totalmente desconexo) el cual se denota por C^+ . Además la proyección de $f^n(R) \cap R$ al eje vertical tiene longitud $(2\lambda)^n$. También se tiene que $f(H^+) = H^+$.

De manera análoga se construye H^- usando preimágenes. Se observa que $f^{-1}(R_0) = f^{-1}(R) \cap D_2$, y $f^{-1}(R_1) = f^{-1}(R) \cap D_4$, son rectángulos verticales de ancho μ^{-1} , además la proyección de $f^{-n}(R) \cap R$ al eje horizontal tiene longitud $(\frac{2}{\mu})^n$. Para alguna sucesión finita $\omega_{-m}, \dots, \omega_{-1}$ de ceros y unos, se tiene $\bigcap_{i=1}^m f^{-i}(R_{\omega_i})$ es un rectángulo vertical de ancho μ^{-m} , y $H^- = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-i}(R)$ es el producto de un intervalo vertical de longitud 1 y un conjunto de Cantor horizontal denotado por C^- .

Lema 4.2. Los conjuntos de cantor C^+ y C^- definidos en el párrafo 4.1 tienen medida de Lebesgue cero.

Demostración. Por el proceso de construcción C^+ tiene medida $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\lambda)^n$ y puesto que $\lambda < \frac{1}{2}$ resulta:

$$\text{medida}(C^+) = 0.$$

De manera análoga, tomando en cuenta que $\mu > 2$

$$\text{medida}(C^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\mu^{-1})^n = 0.$$

Esto termina la prueba. □

Definición 4.3. El **conjunto herradura**

$$H = H^+ \cap H^- = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i(R)$$

es el producto de dos conjuntos de Cantor C^- con C^+ , es cerrado y f -invariante. Además debe tener las siguientes propiedades

- a) Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos.
- b) Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.
- c) Una órbita densa.

4.4. Para cada punto $x \in H$ es posible asociar una sucesión de 0's y 1's como sigue

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= 0, & \text{si } f^n(x) \in R_0 \\ \omega_n(x) &= 1, & \text{si } f^n(x) \in R_1. \end{aligned}$$

Esto permite definir el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi : \Lambda &\rightarrow \prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}, \\ x &\mapsto \{\omega_n(x)\} \end{aligned} \tag{5}$$

El siguiente lema prueba que, efectivamente, Φ es un homeomorfismo.

Lema 4.5. (ver página 25 de [13]) Sea Φ la función definida en (5). Se denota por $\Sigma(2)$ al espacio compacto¹ $\prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$ con la topología producto y un abierto básico para la topología de $\prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$ está dado por los conjuntos abiertos

$$C(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k; i_1, \dots, i_k) = \{\{\omega_n\} : \omega_{i_1} = \epsilon_1, \dots, \omega_{i_k} = \epsilon_k, \epsilon_j \in \{0, 1\}\}.$$

Entonces

- a) Existe un automorfismo natural de $\Sigma(2)$, el **shift** γ dado por $(\gamma\{\omega_n\})_k = \omega_{k+1}$. Esto hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f|_H} & H \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Sigma(2) & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(2) \end{array} .$$

- b) La función definida en (5) es un homomorfismo entre Λ y $\prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$.
- c) Sea $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$, $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$ y $\Phi : \Lambda \rightarrow \Sigma(2)$ el homeomorfismo definido en (5). Si f y γ son topológicamente conjugados² por Φ , entonces Φ lleva órbitas de f en órbitas de γ .

DEMOSTRACIÓN. La prueba del item a) es directamente de las definiciones de Φ y σ .

Para la prueba del item (b) se inicia probando la continuidad de Φ .

Φ es **continua** Sean $x \in H$, U una vecindad de $\Phi(x)$. Es posible tomar un abierto básico, es decir un cilindro abierto

$$\text{Cil}(\Phi(x), N) = \{\{y_n\} : y_i = (\Phi(x))_i, \text{ para } |i| \leq N\},$$

tal que $\text{Cil}(\Phi(x), N) \subset U$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ con $|i| \leq N$ es posible tomar una bola $B_{\delta_i}(f^i(x))$ contenida en la franja horizontal de $f(R) \cap R$ en la cual $f^i(x)$ se encuentra. Puesto que f es continua, entonces para todo $i \in \mathbb{Z}$ con $|i| \leq N$ se tiene que $(\Lambda \cap f^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x))))$ es una vecindad de x en Λ . Luego la intersección finita

$$B_N(x) = \bigcap_{|i| \leq N} (\Lambda \cap f^{-i}(B_{\delta_i}(f^i(x))))$$

también es una vecindad para x en Λ . Por construcción $\Phi(B_N(x))$ está contenido en el cilindro $\text{Cil}(\Phi(x), N)$. Por lo tanto Φ es continua.

¹Esto es por el teorema de Tychonoff, ver página 224 de [6].

²Si $\Phi \circ f = \gamma \circ \Phi$, se dice que f y γ son **topológicamente conjugados** mediante el homomorfismo Φ .

Φ es **inyectiva** Sean x, y dos puntos en H , tal que $\Phi(x) = \Phi(y)$. El primer paso es mostrar que si la parte positiva de las sucesiones son iguales, es decir, $(\Phi(x))_i = (\Phi(y))_i, \forall i \geq 0$, entonces las abcisas de x e y son iguales.

En efecto Puesto que $\Phi(x) = \Phi(y)$ se tiene que $f^{i+1}(x)$ y $f^{i+1}(y)$ están en la misma franja horizontal de $f(R) \cap R$ (ver figura 2), entonces $f^i(x)$ y $f^i(y)$ están en la misma franja horizontal y también en la misma franja vertical de $f^{-1}(R) \cap R$. Porque $f^i(x)$ y $f^i(y)$ están en la misma franja vertical de $f^{-1}(R) \cap R$ se tiene que:

$$|\text{abcisa}(f^{i+1}(y)) - \text{abcisa}(f^{i+1}(x))| = \mu |\text{abcisa}(f^i(y)) - \text{abcisa}(f^i(x))|,$$

donde $\mu > 2$ es el factor que estira $D_2 \cup D_4$ uniformemente en dirección horizontal. Por lo tanto $\forall n$ se tiene que:

$$|\text{abcisa}(f^n(y)) - \text{abcisa}(f^n(x))| = \mu^n |\text{abcisa}(y) - \text{abcisa}(x)|.$$

Si se supone que $\text{abcisa}(y) \neq \text{abcisa}(x)$ y se hace $n \rightarrow \infty$ se tendría que la distancia entre las abcisas de $f^n(x)$ y $f^n(y)$ es infinita, esto es imposible pues $f^n(x)$ y $f^n(y)$ siempre permanecen en R . Luego $\text{abcisa}(y) = \text{abcisa}(x)$.

De manera análoga analizando el pasado de x e y se puede mostrar que $\text{ordenada}(x) = \text{ordenada}(y)$.

Así $x = y$ y por lo tanto Φ es inyectiva.

Φ es **sobre** En la figura 3, se puede observar que $f(R) \cap R$ está dividido en dos rectángulos disjuntos R_0 y R_1 , al aplicar nuevamente f a cada uno de estos rectángulos se obtienen cuatro rectángulos $R_{01}, R_{00}, R_{10}, R_{11}$, los cuales se denotan del siguiente modo

$$\begin{aligned} (0, 0) &= R_0 \cap f(R_0), & (0, 1) &= R_0 \cap f(R_1) \\ (1, 0) &= R_1 \cap f(R_0), & (1, 1) &= R_1 \cap f(R_1). \end{aligned}$$

Sea $\alpha = (a_1, \dots, a_N)$ una sucesión finita de 0 's y 1 's y se asume que $R_\alpha = I_{a_0} \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^N(R_{a_N})$ es una franja horizontal no vacía contenida en R_0 ó R_1 . Esto es, se ha mostrado que

$$I_0 \cap f(I_\alpha) = I_0 \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^{N+1}(R_{a_N})$$

y

$$I_1 \cap f(I_\alpha) = I_1 \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^{N+1}(R_{a_N})$$

son dos franjas horizontales no vacías.

Por inducción se tiene que para cada sucesión finita a_0, \dots, a_n existe una franja horizontal no vacía

$$I_{a_0} \cap f(R_{a_1}) \cap \dots \cap f^{N+1}(R_{a_N}) \neq \emptyset.$$

Sea $\alpha = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Se quiere probar que la intersección $I_\alpha = \bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^i(I_{\alpha_i})$, es no vacía, pues si esto fuese verdad se tiene que si $x \in I_\alpha$, $f^i(x)$ pertenece a I_{α_i} para cada i y $\Phi(x) = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ con lo cual Φ sería sobreyectiva.

En efecto para esto es suficiente que todas las intersecciones correspondientes a las sucesiones finitas sean no vacías. Esto es, si todos los conjuntos $I_{\alpha,N} = \bigcap_{-N}^N f^i(I_{\alpha_i})$ son no vacíos, ellos forman una sucesión encajada de subconjuntos cerrados no vacíos del conjunto compacto Λ . Por lo tanto la intersección $I_\alpha = \bigcap_N I_{\alpha,N}$ es también no vacío.

Por lo tanto Φ es un homeomorfismo, es decir el item (b) es válido.

Para la prueba de (c), sea $x_0 \in \Lambda$, entonces la órbita de x_0 bajo f es

$$\{\dots, f^{-n}(x_0), \dots, f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\},$$

dado que $f = \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \Phi$, entonces para $n \geq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi^{-1} \circ \gamma \circ \Phi(x_0) \text{ (} n \text{ veces)} \\ f^n(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma^n \circ \Phi(x_0), \end{aligned}$$

de donde

$$\Phi \circ f^n(x_0) = \gamma^n \circ \Phi(x_0), \tag{6}$$

es decir Φ lleva órbitas de f en órbitas de γ para $n \geq 0$.

También vale que $f^{-1} = \Phi^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \Phi$, entonces para $n > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} f^{-n}(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \Phi(x_0) \text{ (} n \text{ veces)} \\ f^{-n}(x_0) &= \Phi^{-1} \circ \gamma^{-n} \circ \Phi(x_0), \end{aligned}$$

de donde

$$\Phi \circ f^{-n}(x_0) = \gamma^{-n} \circ \Phi(x_0). \tag{7}$$

Por lo tanto de (6), (7) se tiene que Φ lleva las órbitas de f en las órbitas de γ , esto prueba el item (c) y por lo tanto la prueba del lema. \square

Observación 4.6. Se observa que la función $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$ tiene exactamente dos puntos los cuales son la sucesión cuyo todos sus elementos son ceros y la sucesión que tiene todos sus elementos iguales a uno.

Las sucesiones bi-infinitas las cuales se repiten periódicamente después de alguna longitud fija se denotará por la sucesión de longitud finita con una barra encima, ver página 87 de [15], por ejemplo:

$$\begin{aligned} \{\dots 101010101010\dots\} &\text{ es denotado por } \{\overline{1010}\} \\ \{\dots 010010010010\dots\} &\text{ es denotado por } \{\overline{010010}\} \end{aligned}$$

Para la siguiente proposición, la cual involucra la dinámica de γ , es necesario definir los siguientes conjuntos

Definición 4.7. Sea la función $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$, se define lo siguiente

- a) El conjunto $Per(\gamma) = \{p \in \Sigma(2) : \gamma^k(p) = p, \text{ para algun } k\}$.
- b) Un punto $p \in \Sigma(2)$ se dice no errante para γ , si para toda vecindad U de p existe un número entero positivo n tal que $\gamma^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Luego el **Conjunto no errante** $\Omega(\gamma)$ se define

$$\Omega(\gamma) = \{p \in \Sigma(2) : p \text{ es no errante}\}$$

Observación 4.8. Se puede observar lo siguiente

$$Per(\lambda) \subset \Omega(\lambda) \subset \Sigma(2),$$

y puesto que $\Omega(\gamma)$ es cerrado, (pues es el complemento de un conjunto abierto), se tiene

$$\overline{Per(\lambda)} \subset \Omega(\lambda) \subset \Sigma(2).$$

Proposición 4.9. (Ver página 90 de [15]) La función $\gamma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$ tiene:

- a) Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos.
- b) Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.
- c) Una órbita densa, es decir $\Omega(\gamma) = \overline{Per(\gamma)} = \Sigma(2)$.

DEMOSTRACIÓN.

- a) Primero se observa que las órbitas de sucesiones las cuales se repiten periódicamente son periódicas bajo la iteración por γ , por ejemplo, para las sucesión $\{\overline{10,10}\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \gamma\{\overline{10,10}\} &= \{\overline{01,01}\} \\ \gamma\{\overline{01,01}\} &= \{\overline{10,10}\}. \end{aligned}$$

Así $\gamma^2\{\overline{10,10}\} = \{\overline{10,10}\}$ es una órbita de periodo 2 bajo γ .

En general:

$$\begin{aligned} s &= \overline{s_0 s_1 \cdots s_{k-1} . s_0 s_1 \cdots s_{k-1}} \\ \gamma(s) &= \overline{s_1 s_2 \cdots s_{k-1} s_0 . s_1 s_2 \cdots s_{k-1} s_0} \\ \gamma^2(s) &= \overline{s_2 s_3 \cdots s_{k-1} s_0 s_1 . s_2 s_3 \cdots s_0 s_1} \\ &\vdots \\ \gamma^k(s) &= \overline{s_0 s_1 \cdots s_{k-1} . s_0 s_1 \cdots s_{k-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión de órbitas de repetición periódicas de periodo k corresponden a órbitas de a de periodo k . Además, dado cualquier k fijo el número de sucesiones que tienen bloques de longitud k que se repiten periódicamente es finito, así que, γ tiene una infinidad numerable de órbitas periódicas teniendo todos los periodos posibles, por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Periodo 1} &: \{\overline{0,0}\} \quad \{\overline{1,1}\} \\ \text{Periodo 2} &: \{\overline{10,10}\} \rightarrow \{\overline{01,01}\} \rightarrow \{\overline{10,10}\} \\ &: \{\overline{01,01}\} \rightarrow \{\overline{10,10}\} \rightarrow \{\overline{01,01}\} \\ \text{Periodo 3} &: \{\overline{001,001}\} \rightarrow \{\overline{010,010}\} \rightarrow \{\overline{100,100}\} \rightarrow \{\overline{001,001}\} \\ &: \{\overline{010,010}\} \rightarrow \{\overline{100,100}\} \rightarrow \{\overline{001,001}\} \rightarrow \{\overline{010,010}\} \\ &: \{\overline{100,100}\} \rightarrow \{\overline{001,001}\} \rightarrow \{\overline{010,010}\} \rightarrow \{\overline{100,100}\} \\ &: \{\overline{011,011}\} \rightarrow \{\overline{110,110}\} \rightarrow \{\overline{101,101}\} \rightarrow \{\overline{011,011}\} \\ &: \{\overline{101,101}\} \rightarrow \{\overline{011,011}\} \rightarrow \{\overline{110,110}\} \rightarrow \{\overline{101,101}\} \\ &: \{\overline{110,110}\} \rightarrow \{\overline{101,101}\} \rightarrow \{\overline{011,011}\} \rightarrow \{\overline{110,110}\} \\ \dots &: \dots \end{aligned}$$

En general existen $k!$ órbitas periódicas de periodo k que corresponden al número posible de permutaciones del bloque a la derecha del punto decimal, $.s_0 s_1 \cdots s_{k-1}$.

b) Dado que $\Sigma(2)$ es no numerable si quitamos la infinidad numerable de sucesiones de símbolos periódicos, permanecerá un número no numerable de sucesiones de símbolos no periódicos y dado que las órbitas de sucesiones no periódicas nunca se repiten queda probado b).

c) Primero hay que definir una métrica en $\Sigma(2)$.

Sean

$$\begin{aligned} s &= \{\dots, s_{-n}, \dots, s_{-1}s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\} \\ s' &= \{\dots, s'_{-n}, \dots, s'_{-1}s'_0, s'_1, \dots, s'_n, \dots\} \end{aligned}$$

dos elementos en $\Sigma(2)$, se define una métrica en $\Sigma(2)$ como sigue:

$$\begin{aligned} d : \Sigma(2) \times \Sigma(2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, s') &\mapsto d(s, s') = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{|s_i - s'_i|}{2^{|i|}}. \end{aligned}$$

Para probar el ítem c) se tiene que mostrar la existencia de algún $s \in \Sigma(2)$ tal que su órbita sea densa en $\Sigma(2)$, es decir, para cualquier $s' \in \Sigma(2)$ y dado $\epsilon > 0$ se debe tener

$$d(s', \gamma^n(s)) < \epsilon.$$

Para construir s primero se observa todas las sucesiones finitas de longitud k por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{longitud 1} &: \{0\}\{1\} \\ \text{longitud 2} &: \{00\}\{01\}\{10\}\{11\} \\ \text{longitud 3} &: \{000\}\{001\}\{010\}\{011\} \\ &: \{100\}\{101\}\{110\}\{111\} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general existen 2^k sucesiones finitas de longitud k . Ahora se introduce un orden en las sucesiones finitas de 0's y 1's del siguiente modo: Sean $s = \{s_1s_2 \dots s_k\}$ y $\bar{s} = \{\bar{s}_1\bar{s}_2 \dots \bar{s}_{k'}\}$, se dice que $s < \bar{s}$ si $k < k'$, en el caso en que $k = k'$ se dirá que $s < \bar{s}$ si $s_i < \bar{s}_i$ donde s_i es el primer entero donde $s_i \neq \bar{s}_i$, por ejemplo

$$\{0\} < \{1\}, \quad \{0\} < \{00\}, \quad \{01\} < \{11\}, \text{ etc.}$$

Este ordenamiento permite diferenciar sucesiones finitas de igual longitud. Así se denota las sucesiones de 0's y 1's de longitud k como sigue:

$$s_1^k < s_2^k < \dots < s_{2^k}^k,$$

donde el superíndice indica la longitud de la sucesión y el subíndice indica la sucesión en particular de longitud k , la cual está determinada de manera única por el orden anterior, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{longitud 1} &: \{0\}_1^1 < \{1\}_2^1 \\ \text{longitud 2} &: \{00\}_1^2 < \{01\}_2^2 < \{10\}_3^2 < \{11\}_4^2 \\ \text{longitud 3} &: \{000\}_1^3 < \{001\}_2^3 < \{010\}_3^3 < \{011\}_4^3 < \\ &: \{100\}_5^3 < \{101\}_6^3 < \{110\}_7^3 < \{111\}_8^3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esto nos da una manera de escribir el candidato para una órbita densa, que es la siguiente:

$$s = \{\dots s_8^3 s_6^3 s_4^3 s_2^3 s_1^2 s_1^2 s_3^3 s_3^3 s_5^3 s_7^3 \dots\}.$$

Luego s contiene todas las sucesiones posibles de longitud fija. Solo resta probar que la órbita de s es densa en $\Sigma(2)$.

En efecto: sea s' un elemento arbitrario de $\Sigma(2)$ y sea una vecindad (cilindro) de s'

$$\text{Cil}^{M(\epsilon)}(s') = \{s'' \in \Sigma(2) : d(s', s'') < \epsilon\}$$

de manera equivalente

$$\text{Cil}^{M(\epsilon)}(s') = \{s'' \in \Sigma(2) : s'_i = s''_i, \quad \forall |i| \leq M\}.$$

Por construcción de s , la sucesión finita

$$\{s'_{-M} \dots s'_{-1} s'_0 s'_1 \dots s'_M\}$$

está contenida en algún lugar de s . Luego debe existir algún \tilde{M} tal que $d(\gamma^{\tilde{M}}(s), s') < \epsilon$. Por lo tanto se concluye que la órbita de s es densa en $\Sigma(2)$.

Por la observación 4.8 resta probar que $\overline{\text{Per}(\gamma)} = \Sigma(2)$. Es decir se tiene que construir una sucesión de puntos periódicos τ_n que converjan a un punto arbitrario $s = (\dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots)$. Se define la sucesión $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuyo término general es

$$\tau_n = (\dots s_{-n} s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots, \dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 \dots s_n \dots),$$

esto es, τ_n es una sucesión periódica cuyas entradas son iguales a las de s desde la $(-n)$ ésima entrada hasta la n ésima entrada. Por lo tanto $\tau_n \rightarrow s$. Esto termina la demostración. □

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 4.10. *La herradura de Smale tiene:*

- a) *Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los periodos.*
- b) *Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.*
- c) *Una órbita densa.*
- d) *Tiene medida de Lebesgue cero.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que f es topológicamente conjugado a γ , la demostración de los ítem (a), (b) y (c) del teorema sigue del lema 4.5 y del teorema 4.9. La prueba de (d) se desprende del lema 4.2. Esto termina la demostración del teorema. □

5. Una herradura con medida de Lebesgue positiva

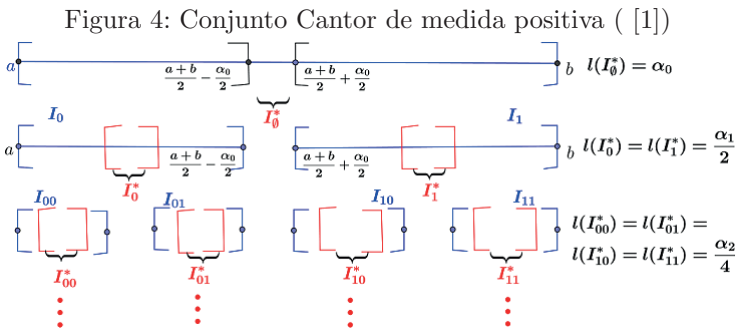
La herradura de Smale, la cual es un conjunto de Cantor, tiene medida de Lebesgue cero. Sin embargo es posible construir una herradura, en el sentido de la definición 4.3, con medida de Lebesgue positiva, el proceso de construcción es análogo, sin embargo se coloca una restricción en la medida de los intervalos que se retiran en la construcción estos intervalos no todos tienen igual medida. Aquí se hace uso de los artículos [1, 5].

Lema 5.1. Sean I un intervalo no degenerado de la recta real y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales de modo que $\alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, además $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I)$, donde $l(I)$ denota la longitud del intervalo I . Además sea $\underline{s} = s_1 s_2 \dots s_n \in \Sigma^+(2) = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} : s(i) = s_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de 0's y 1's de longitud $n = n(\underline{s})$, es posible que la sucesión sea vacía si se toma la longitud $n = n(\underline{s})$ igual a cero, entonces existe un conjunto de Cantor de medida positiva definido por

$$K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}}$$

Demostración. Sea $I = I_0 = [a, b]$, de este intervalo se retira el interior del intervalo I_0^* el cual tiene longitud α_0 , con esto $I_0^* \subset I_0$ al efectuar este retiro restan dos intervalos, uno a la izquierda y otro a la derecha, a los cuales se denotan por I_0 e I_1 .

De cada uno de estos intervalos I_k ($k = 0, 1$) se retiran el interior de los intervalos I_k^* los cuales tienen longitud $\frac{\alpha_1}{2}$ y también poseen el mismo centro de I_k . Así se tiene 4 intervalos los cuales se denotan por $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$. (Ver figura 4)



Al repetir este proceso y considerar la sucesión \underline{s} de longitud $n = n(\underline{s})$ se define $I_{\underline{s}0}$ e $I_{\underline{s}1}$ los intervalos de la izquierda y de la derecha que restan cuando el interior del intervalo $I_{\underline{s}}^*$ es retirado de $I_{\underline{s}}$.

De esta construcción se tiene que $I_{\underline{s}k}, k = 0, 1$ tiene longitud $\frac{\alpha_{n(\underline{s}k)}}{2^{n(\underline{s}k)}}$ y

el mismo centro de I_{sk} . Luego el conjunto de Cantor está dado por:

$$K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}},$$

donde los intervalos que fueron retirados del intervalo I tienen longitud distinta.

La medida de Lebesgue de K_I está dada por:

$$m(K_I) = l(I) - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n,$$

se nota que la medida del conjunto de Cantor K_I es positiva pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I).$$

□

Proposición 5.2. *Sea J otro intervalo no degenerado, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos con $\beta_n > 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \leq l(J)$, es posible construir, de manera análoga, intervalos $J_{\underline{s}}$, $J_{\underline{s}}^*$ y K_J .*

Se asume que $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde (α_n) son los mismos del lema 5.1. Además se elige una sucesión de números $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y para cada \underline{s} se considera

$$g_{\underline{s}} : I_{\underline{s}}^* \rightarrow J_{\underline{s}}^*$$

un difeomorfismo de clase C^1 que preserva orientación. También se asume que $g_{\underline{s}}$ satisface:

- i) $g'_{\underline{s}}(x) = \gamma$ para x una extremidad de $I_{\underline{s}}^*$,*
- ii) $g'_{\underline{s}}(I_{\underline{s}}^*)$ está contenido en un intervalo generado por $\gamma \pm \delta_n$ y $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \pm \delta_n$.*

Al considerar todas las sucesiones \underline{s} se tiene la función

$$g : \bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^* \rightarrow \bigcup_{\underline{s}} J_{\underline{s}}^* \tag{8}$$

está bien definida, entonces se tiene lo siguiente:

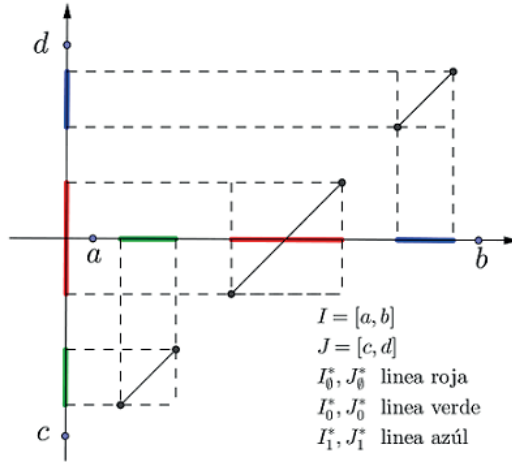
- a) $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$ es denso en I .*
- b) La función g definida en (8) es uniformemente continua.*
- c) Es posible extender g a una función $g^* : I \rightarrow J$ tal que g^* es un homeomorfismo, además g^* es de clase C^1 .*

DEMOSTRACIÓN. Primero demos un ejemplo para entender mejor la notación, al fijar la longitud de \underline{s} se considera un difeomorfismo $g_{\underline{s}} : I_{\underline{s}}^* \rightarrow J_{\underline{s}}^*$.

Por ejemplo si $n(\underline{s}) = 1$ se tiene que

$$I_{\underline{s}}^* = I_{\emptyset}^* \cup I_0^* \cup I_1^*,$$

Figura 5: Difeomorfismo que preserva orientación ([1])



$$J_{\underline{s}}^* = J_0^* \cup J_0^* \cup J_1^*,$$

y para este caso un difeomorfismo $g_{\underline{s}}$ viene dado por la figura 5. Para probar que $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$ es denso en I . Sean $x \in I$, $\epsilon > 0$, si x está en el complemento de $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$ es inmediato.

Suponga que $x \in K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}}$, entonces $x \in \bigcup_{n(\underline{s})=m} I_{\underline{s}}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{n_0-1} < \epsilon$. Luego existe $x' \in I \setminus \bigcup_{n(\underline{s})=n_0} I_{\underline{s}}$ tal que

$|x - x'| \leq \alpha_{n_0-1} < \epsilon$. Con esto queda probado que $\bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$ es denso en I .

Para probar que g es uniformemente continua, se toma $\epsilon > 0$, y sean $x, y \in \bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^*$ tal que $|g(x) - g(y)| < \epsilon$. Al tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{n_0} < \epsilon$ y $|g(x) - g(y)| \leq \beta_{n_0} < \epsilon$ basta elegir $\delta^* = \alpha_{n_0}$ para tener $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ esto vale $\forall n \geq n_0$.

Luego existe δ^* tal que si $x, y \in \bigcup_{n(\underline{s}) \geq n_0} I_{\underline{s}}^*$, entonces $|g(x) - g(y)| < \epsilon$.

Falta probar la afirmación para $n < n_0$ para esto se usa que $g \in C^1$.

Como $g \in C^1$, entonces g' está acotada por M_n en $I_{\underline{s}}^*$ donde $n = n(\underline{s})$ para todo $n < n_0$. Por el teorema de valor medio se tiene:

$$|g(x) - g(y)| \leq |g'(\zeta)||x - y| < \epsilon, \text{ si } |x - y| < \delta_n$$

donde $\delta_n = \frac{\epsilon}{M_n}$ y ζ pertenece al intervalo formado por x y y .

Es suficiente tomar $\delta = \min\{\delta^*, \delta_1, \dots, \delta_{n_0-1}\}$ para obtener que $|g(x) - g(y)| < \epsilon$. Por lo tanto g es uniformemente continua. Además g es un difeomorfismo.

Para probar (c) se hace uso del item (b), puesto que este es válido es posible extender g de manera uniformemente continua a una función

$g^* : I \rightarrow J$ definida por

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in \bigcup_{\underline{s}} I_{\underline{s}}^* \\ \lim_{y \rightarrow x} g(y) & , \quad x \in K_I \end{cases} \quad (9)$$

Para probar que g^* es un homeomorfismo, se hace uso del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} I_{\underline{s}}^* & \xrightarrow{g} & J_{\underline{s}}^* & & I_{\underline{s}}^* & \xleftarrow{g^{-1}} & J_{\underline{s}}^* \\ \text{Id}_{I_{\underline{s}}^*} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{J_{\underline{s}}^*} & \text{Id}_{I_{\underline{s}}^*} \uparrow & & \downarrow \text{Id}_{J_{\underline{s}}^*} \\ I & \xrightarrow{g^*} & J & & I & \xleftarrow{(g^*)^{-1}} & J \end{array} .$$

Como g es un difeomorfismo, entonces existe $g^{-1} : J_{\underline{s}}^* \rightarrow I_{\underline{s}}^*$ y de la misma forma es posible extender g^{-1} a una función continua $(g^*)^{-1} : J \rightarrow I$, solo resta probar que $(g^*)^{-1}$ es la inversa de g^* .

Para ello se debe verificar que $(g^*)^{-1}g^* = Id_I$ y $g^*(g^*)^{-1} = Id_J$.

Del diagrama de arriba se tiene $Id_{J_{\underline{s}}^*} \circ g = g^* \circ Id_{I_{\underline{s}}^*}$ y $Id_{I_{\underline{s}}^*} \circ g^{-1} = (g^*)^{-1} \circ Id_{J_{\underline{s}}^*}$, de la primera igualdad se tiene $g^* \circ (g^*)^{-1} = Id_{J_{\underline{s}}^*}$ y de la segunda se tiene $g^* \circ (g^*)^{-1} = Id_{I_{\underline{s}}^*}$.

Por lo tanto $(g^*)^{-1}$ es la inversa de g^* y como ambas son continuas entonces g^* es un homeomorfismo.

Para probar que g^* es de clase C^1 , se tiene que la derivada de g^* viene dada por

$$(g^*)'(x) = \begin{cases} g'(x) & , \quad x \in I \setminus K_I \\ \gamma & , \quad x \in K_I \end{cases}$$

tomemos $x \in I$, esto produce dos casos:

- (i) Si $x \in I \setminus K_I$, entonces $x \in I_{\underline{s}}$ para algún \underline{s} . Puesto que $g^*|_{I_{\underline{s}}} = g$ de clase C^1 se tiene que g' es continua en x .

Por lo tanto $(g^*)'$ es continua en x .

- (ii) Si $x \in K_I$, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$, se debe estimar

$$|(g^*)'(x) - (g^*)'(x_n)| = |\gamma - (g^*)'(x_n)|.$$

Para esto hay tres casos:

- i') Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_I$, entonces $|(g^*)'(x) - (g^*)'(x_n)| = 0$. Por lo tanto $(g^*)'(x) \rightarrow (g^*)'(x_n)$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- ii') Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I \setminus K_I$,

$$|(g^*)'(x) - (g^*)'(x_n)| = |\gamma - g'(x_n)| < \delta_n,$$

esta última desigualdad se da por la característica b) dada para la función g' . Luego cuando $n \rightarrow \infty$, $\delta_n \rightarrow 0$ con esto se tiene $(g^*)'(x_n) \rightarrow (g^*)'(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto $(g^*)'$ es continua en x .

- iii') Si $(x_n) = (x_{n_k}) \cup (x_{n_j})$ donde $(x_{n_k}) \subset I \setminus K_I$ y $(x_{n_j}) \subset K_I$, entonces de a) y b) se tiene $(g^*)'(x_n) \rightarrow (g^*)'(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto $(g^*)'$ es continua en x . Esto prueba que $(g^*)'$ es continua en x .

Esto termina la prueba de que g^* es de clase C^1 y por lo tanto termina la prueba de la proposición. □

Es decir se ha obtenido un difeomorfismo, al que se denomina G , $G : I \rightarrow J$ de clase C^1 . En el siguiente teorema se construye la herradura de medida positiva.

Teorema 5.3. ([5]) Sea $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $\beta_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < 2$ y $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \rightarrow 1$, se considera $J = [-1, 1]$, $I = [\frac{\beta_0}{2}, 1]$ y la sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $\alpha_n = \frac{\beta_{n+1}}{2}$. Además sea $S = I \times J$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo, donde $S = I \times J$, definido por:

1. $f(x, y) = (G(x), G^{-1}(y))$, para $(x, y) \in I \times J$.
2. $f(x, y) = (G(-x), -G^{-1}(y))$, para $(x, y) \in -I \times J$.
3. $f(T) \cap (J \times J) = \emptyset$ donde $T = (-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$,

entonces existe una herradura de clase C^1 , en el sentido de la definición 4.3, con medida de Lebesgue positiva.

DEMOSTRACIÓN. Empezaremos probando que la herradura tiene medida positiva, para ello sea $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $\beta_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < 2$ y $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \rightarrow 1$.

Sean $J = [-1, 1]$, $I = [\frac{\beta_0}{2}, 1]$ y la sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $\alpha_n = \frac{\beta_{n+1}}{2}$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I)$ y $\gamma = 2$, con esto es posible obtener un difeomorfismo $G : I \rightarrow J$ de clase C^1 de la manera descrita anteriormente.

Para la construcción de la herradura se debe tener en consideración las propiedades de G , en este caso la principal de ellas es que preserva orientación. Por tanto se realiza los mismos pasos que para la construcción de la herradura de Smale, es decir, se contrae el cuadrado S en la dirección en la dirección vertical y se estira en la dirección horizontal y por último se dobla en forma de herradura interceptando con S , esta noción geométrica de lo que debe pasar con S es traducida en la definición del difeomorfismo f como sigue: Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo, donde $S = I \times J$, definido por:

1. $f(x, y) = (G(x), G^{-1}(y))$, para $(x, y) \in I \times J$.
2. $f(x, y) = (G(-x), -G^{-1}(y))$, para $(x, y) \in -I \times J$.
3. $f(T) \cap (J \times J) = \emptyset$ donde $T = (-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$.

Hay que describir como trabaja f en $I \times J$, $-I \times J$ y en $(-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$.

Se observa en la figura 6 que cada punto $(x, y) \in I \times J$ es llevado por f en un punto $(G(x), G^{-1}(y)) \in J \times I$. En particular $f(1, y) = (G(1), G^{-1}(y))$ (se denota por $f(1, y)$ la imagen del conjunto $\{1\} \times J$ por

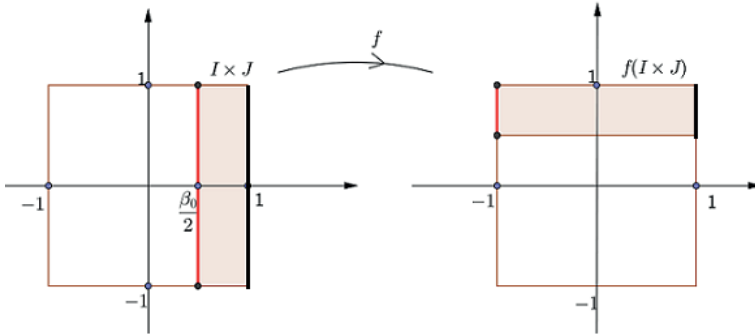
f .) $G(1) = 1$ pues si no lo fuera existiría algún $c \in [\frac{\beta_0}{2}, 1)$ tal que $G(c) = 1$ y se tendría $G(c) > G(1)$ lo que contradice el hecho que G preserva orientación. Por tanto $f(1, y) = (1, G^{-1}(y))$. Como en la figura 6.

De la misma manera se tiene:

$$f(\frac{\beta_0}{2}, y) = (G(\frac{\beta_0}{2}), G^{-1}(y)) = (-1, G^{-1}(y)).$$

Si $G(\frac{\beta_0}{2}) \neq -1$ existiría $c \in (\frac{\beta_0}{2}, 1]$ tal que $G(c) = -1 < G(\frac{\beta_0}{2})$ lo que de nuevo contradice el hecho que G preserva orientación. Así se tiene la imagen de $I \times J$ bajo f como en la figura 6. De manera análogo

Figura 6: Acción de f en $I \times J$ ([1])

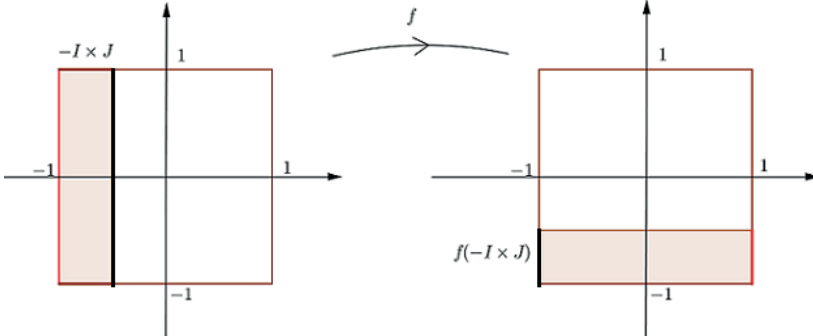


ga se analiza cuando $(x, y) \in -I \times J$, en este caso se tiene $f(x, y) = (G(-x), -G^{-1}(y)) \in J \times (-I)$. En particular

$$f(-1, y) = (G(1), -G^{-1}(y)) = (1, G^{-1}(y)), \quad f(\frac{-\beta_0}{2}, y) = (G(\frac{-\beta_0}{2}), G^{-1}(y)),$$

como puede ser visto en la figura 7

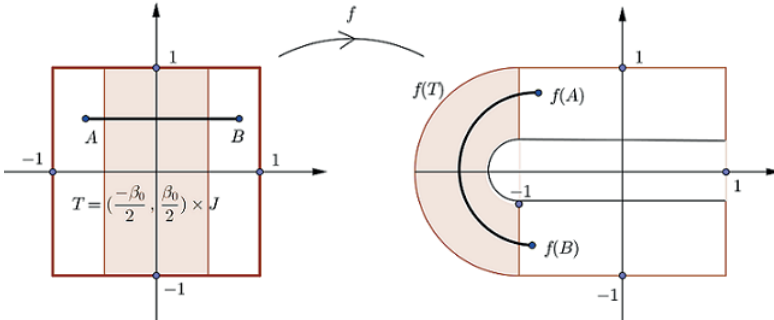
Figura 7: Acción de f en $-I \times J$ ([1])



Falta analizar lo que ocurre en la región $T = (\frac{-\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}) \times J$ para ello se

toma un segmento de recta \overline{AB} donde $A \in I \times J$ y $B \in (-I) \times J$. Se observa (ver figura 8) que cuando se aplica el difeomorfismo f al segmento \overline{AB} , la curva $f(\overline{AB})$ está ligada sin interrupciones por un punto en $f(I \times J)$ y un punto en $f((-I) \times J)$ y puesto que $f(T) \cap J \times J = \emptyset$ y G preserva orientación, se concluye que $f(T)$ es una región como en la figura 8.

Figura 8: Acción de f en $T = \left(\frac{-\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \times J$ ([1])



Así se define la herradura Ω como el conjunto

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S) = K_J \times K_J.$$

De forma análoga que en la herradura de Smale, los iterados $f^n(S)$ para $n < 0$ serán herraduras en posición vertical en S . Por tanto se tiene una herradura de Smale con la intersección de esos conjuntos.

La herradura de Bowen Ω tiene medida de Lebesgue dada por:

$$m(\Omega) = m(K_J \times K_J) = (m(K_J))^2.$$

Pero $m(K_J) = 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n > 0$, luego

$$m(\Omega) = \left(2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right)^2 > 0.$$

Puesto que la construcción es análoga a la herradura de Smale de medida nula es posible encontrar una conjugación entre la herradura de Bowen y el espacio $\Sigma(2)$ definido en el lema 4.5, es decir para la herradura de Bowen es válido el ítem (b) del lema 4.5. Por ello la definición 4.3 es satisfecha. Esto completa la prueba. Con esto se acaba la construcción de la herradura de Bowen. \square

Si tuviésemos la intención de construir una herradura de clase C^2 con medida positiva, esto no se podría por el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Sea $f \in C^2$ como en el teorema 5.3, entonces la herradura tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Ver el teorema 5,6 de [4]. \square

6. Aplicaciones

Existen muchas aplicaciones sobre la existencia de herraduras como por ejemplo:

- En neurociencia, se presentan herraduras en el estudio de ecuaciones diferenciales que modelan las redes neuronales. Para esto ver [16].
- En matemática, existe una estrecha relación entre los puntos homoclinicos transversales y la existencia de herraduras. Para esto ver [9].
- En ingeniería: en ecuaciones diferenciales de control de masas acopladas. Para esto ver [7].
- En probabilidad. Podemos analizarlo de la siguiente manera: Al hacer una conjugación entre el espacio de dos símbolos y el conjunto herradura y reflexionamos nos dice que cualquier futuro que nos imaginemos es posible para al menos un punto, luego predecir se hace imposible pues todo es posible. El libre albedrío en su máxima expresión.

Referencias

- [1] ANDERSON L. MACIEL AND ALESSANDRA KREUTZ *A ferradura de medida positiva* Revista do Ciencias Natirais e Exatas UFSM. volumen 36, pages 18 – 29, 2013.
- [2] BRIN, MICHAEL AND STUCK, GARRETT *Introduction to dynamical systems* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] BONATTI, CHRISTIAN AND DÍAZ, LORENZO J. AND VIANA, MARCELO *Dynamics beyond uniform hyperbolicity* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin 2005.
- [4] BOWEN, RUFUS AND RUELLE, DAVID *The ergodic theory of Axiom A flows* Inventiones Mathematicae Invent. Math. volumen 29, pages 181 – 202, 1975.
- [5] BOWEN, RUFUS *A horseshoe with positive measure* Inventiones Mathematicae volumen 29, pages 203 – 204, 1975.
- [6] DUGUNDJI, JAMES *Topology* Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966.
- [7] G.C. LAYEK *An Introduction to Dynamical System and Chaos*. Springer, 2015.
- [8] GIL CHILCA, FRANCISCO JAVIER *Modelado y control de masas acopladas. Aplicaciones a dispositivos de almacenamiento microelectromecánicos*. Tesis doctoral Universidad de Alicante 2005.
- [9] HASSELBLATT, BORIS AND KATOK, ANATOLE *A first course in dynamics With a panorama of recent developments* Cambridge University Press, New York 2003.
- [10] HASSELBLATT, BORIS AND KATOK, ANATOLE *Introduction to the modern theory of dynamical systems With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza* Cambridge University Press, New York 1995.

- [11] J. MENDOZA *Sistemas periódicos: perturbación y aplicaciones* Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2013.
- [12] MOHD HAFIZ MOHD *Dynamical Systems, Bifurcations analysis and Applications* Penang Malaysia, 2018.
- [13] NITECKI, ZBIGNIEW *Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms* The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1971.
- [14] ROBINSON, CLARK *Dynamical systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos* Second edition, CRC Press, Boca Raton, FL. 1999.
- [15] SHUB, MICHAEL *Global stability of dynamical systems With the collaboration of Albert Fathi and Rémi Langevin, Translated from the French by Joseph Christy*, Springer-Verlag, New York 1987.
- [16] SMALE, S. *Differentiable dynamical systems* Bulletin of the American Mathematical Society Bull. Amer. Math. Soc. volumen 73, pages 747 – 817, 1967.
- [17] WEN, LAN *Differentiable Dynamical Systems: An introduction to Structural Stability and Hyperbolicity* American Mathematical Society, 2016.
- [18] WIGGINS, STEPHEN *Global bifurcations and chaos, Analytical methods* Springer-Verlag, volumen 73, New York. 1988.
- [19] ZHENG G, TONNELIER A. *Chaotic solutions in the quadratic integrate-and-fire neuron with adaptation. Cognitive Neurodynamics.* 2009;3(3):197-204. doi:10.1007/s11571-008-9069-6.