Ciclos límite en un sistema 4 prototipo R$\ddot{o}$ssler

Joel Mendoza
Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Científica del Sur
Perú

12 de enero de 2021

Resumen

En este artículo, se comunica el estudio de la búsqueda de ciclos límite del sistema diferencial 4 prototipo Rossler, haciendo uso del método de averaging. Aquí estudiamos a [3]
Palabras clave: Sistema 4 prototipo R$\ddot{o}$ssler, Método de averaging, ciclos límite, soluciones T-periódicas

Abstract

In this article, the study of the search for limit cycles of the Rossler prototype differential system 4 is reported, using the averaging method. Here we study [3]
Palabras clave: System 4 prototype, Averaging method, limit cycles, T-periodic solutions

Recibido: 25/06/2021
Aprobado: 30/09/2021

1. Introducción

El sistema 4-prototipo Rossler es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales no lineales de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -y-z \\ y' & = & x \\ z' & = & \alpha y(1-y)-\beta z, \end{array} \tag{1}$$

las cuales fueron analizadas y estudiadas por Otto R$\ddot{o}$ssler.

Estas ecuación definen un sistema din´ámico continuo, en el cuál se hace presente el caos. De aquí que su estudio el estudio de la existencia de ciclos límite es de gran importancia.

2. Materiales y métodos

Para el estudio de la existencia de los ciclos límite del sistema 4 prototipo R$\ddot{o}$ssler haremos uso del siguiente teorema cuya demostración puede hallarse en [2], [4], [1].

Teorema 2.1. *Considere el siguiente sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t,x) + \epsilon^2 R(t,x,\epsilon) \tag{2}$$

donde $F_1 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ *son funciones continuas, T-periódicas en la primera variable y* D *es subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$*. Se define* $f_1 : D \to \mathbb{R}^n$ *como:*

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s,z)ds \tag{3}$$

y se asume que:

(i) F_1, R, D_xF, D_x^2F, D_xR *son definidas, continuas y limitadas por una constante* M *(independiente de* ϵ*) en* $D \times [0,\infty)$*;* $-\epsilon_f < \epsilon < \epsilon_f$

(ii) *para* $a \in D$ *con* $f_1(a) = 0$*, se tiene* $J_{f_1}(a) \neq 0$.

Entonces para $|\epsilon| > 0$ *suficientemente pequeño, existe una solución* $T-$*periódica* $\varphi(\cdot,\epsilon)$ *del sistema 2 tal que* $\varphi(\cdot,\epsilon) \to a$ *cuando* $\epsilon \to 0$

3. Resultados y discusión

El sistema 4-prototipo Rossler que se considera es el siguiente

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -y-z \\ y' &=& x \\ z' &=& \alpha y(1-y) - \beta z, \end{array} \tag{4}$$

Teorema 3.1 ([3]). *Considere el sistema 4-prototipo Rossler* (4) *que satisface* $(\alpha+2\beta)\alpha > 0$. *Además se considera los nuevos parámetros* (a,b) *definidos como sigue* $\alpha = \epsilon a$ *y* $\beta = -\epsilon(b + \frac{a}{1+\epsilon^2 b^2})$. *Entonces para* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeño existe una solución periódica* γ_ϵ *de* (4) *tal que* $\gamma_\epsilon \to \{z = \frac{1}{2}\} \cap \{x^2 + (y+z)^2 = -\frac{a+2b}{2a}\}$ *cuando* $\epsilon \to 0$. *Mas aun* γ_ϵ *es asintóticamente estable cuando* $a+b<0$ *e inestable cuando* $a+b>0$.

Demostración. Desde que $\alpha = \epsilon a$ y $\beta = -\epsilon(b + \frac{a}{1+\epsilon^2 b^2}) \approx -\epsilon(a+b)$, si $(\alpha+2\beta)\alpha > 0$ y ϵ es suficientemente pequeño, entonces

$$(a+2b) < 0, \tag{5}$$

porque $(\alpha+2\beta)\alpha \approx -\epsilon^2(a+2b)a$, así el sistema (4) puede ser escrito como:

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -y-z \\ y' &=& x \\ z' &=& \epsilon a y(1-y) + \epsilon(b + \frac{a}{1+\epsilon^2 b^2})z, \end{array} \tag{6}$$

el polinomio característico del sistema linealizado en el punto de equilibrio localizado en el origen es

$$p(\lambda) = \frac{(\lambda - \epsilon b)[-1 + \epsilon^2 b(a-b) + a\epsilon\lambda - (1+\epsilon^2 b^2)\lambda^2]}{1+\epsilon^2 b^2}$$

además cuando $\epsilon \to 0$ los autovalores asociados al polinomio característico son $0, \pm i$, después del cambio de variable

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la parte lineal en su forma de Jordan está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así el sistema (6) puede ser escrito como

$$\begin{array}{rcl} X' & = & -Y + \epsilon f(X,Y,Z) + O(\epsilon^2) \\ Y' & = & X \\ Z' & = & -\epsilon f(X,Y,Z) + O(\epsilon^2), \end{array}$$

con $f(X;Y;Z) = -bZ + a(X + X^2 + 2XZ + Z^2)$, ahora al realizar el cambio de coordenadas a coordenadas cilínddricas con $X = r\cos\theta$, $Y = r\sin\theta$ y $z = Z$ entonces el sistema sigue como

$$\begin{array}{rcl} r' & = & \epsilon g_1(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \\ \theta' & = & 1 + \epsilon g_2(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \\ z' & = & \epsilon g_3(\theta,r,z) + O(\epsilon^2), \end{array}$$

con

$$\begin{array}{rcl} g_1(\theta,r,z) & = & -\cos\theta g_3(\theta,r,z) \\ g_2(\theta,r,z) & = & \dfrac{\sin\theta}{r} g_3(\theta,r,z) \\ g_3(\theta,r,z) & = & bz - a(z^2 + r\cos\theta(1 + 2z + r\cos\theta)), \end{array}$$

además éste sistema está bien definido para $r > 0$. Más aún en esta región para ϵ suficientemente pequeño se tiene que $\theta' > 0$ en una bola grande centrada en el origen, luego se puede reescribir el sistema diferencial como

$$\begin{array}{rcl} \frac{dr}{d\theta} & = & \epsilon g_1(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \\ \frac{dz}{d\theta} & = & \epsilon g_3(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \end{array}$$

tomando θ como nueva variable, el sistema (3) es $2\pi-$periódico y estan en su forma estandar para aplicar el teorema donde las funciones promedio de g_1 y g_3 con respecto a θ son

$$\begin{array}{rcccl} \overline{g}_1(r,z) & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(\theta,r,z)d\theta & = & \frac{1}{2}ar(1+2z) \\ \overline{g}_3(r,z) & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_3(\theta,r,z)d\theta & = & \frac{1}{2}[-a(r^2+2z^2)+2bz] \end{array}$$

el único cero (r^*, z^*) con $r^* > 0$ de la función $(r,z) \to \mathfrak{F}(r,z) = (\overline{g}_1(r,z), \overline{g}_3(r,z))$ es $(r^*, z^*) = (\sqrt{-\frac{a+2b}{2a}}, \frac{-1}{2})$ como $(a+2b)a < 0$ entonces $r^* \in \mathbb{R}$, además el jacobiano de $\mathfrak{F}$ en el punto (r^*, z^*) es

$$D\mathfrak{F}(r^*, z^*) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\frac{(a+2b)a}{2}} \\ -\sqrt{-\frac{(a+2b)a}{2}} & a+b \end{pmatrix}$$

su determinate es $det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) = -\frac{1}{2}a(a+2b) > 0$ por lo tanto (r^*, z^*) s un cero simple de $\mathfrak{F}$ luego se concluye por el teorema la existencia de na órbita 2π-periódica $\gamma_\epsilon = \{(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ del sistema 3) tal que $(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) \to (r^*, z^*))$ cuando $\epsilon \to 0$.

Además si se denota por λ_1, λ_2 los autovalores de la matriz $D\mathfrak{F}(r^*, z^*)$ e obtiene que

$$\lambda_1.\lambda_2 = det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) > 0, \;\; \lambda_1 + \lambda_2 = a + b$$

s decir o bien λ_1, λ_2 son ambos positivos o bien λ_1, λ_2 son ambos negativos ıego la óribta $2\pi-$periódica es asintoticamente estable si $a + b < 0$ e ıestable cuando $a + b > 0$ entonces la conclusión del teorema sobre la stabilidad ha sido probada.

Ahora regresando através de los cambios de variable, se tiene que el stema (3) tiene una órbita periódica $\gamma_\epsilon \to C$ cuando $\epsilon \to 0$ donde C s el circulo dado por $C = \{Z = z^*\} \cap \{X^2 + Y^2 = r^{*2}\}$ la intersección e un plano y un cilindro, finalmente el sistema (3) y por lo tanto el stema 4-prototipo Rossler tiene una órbita periódica γ_ϵ tal que $\gamma_\epsilon \to$ $z = z^*\} \cap \{x^2 + (y + z)^2 = r^{*2}\}$ cuando $\epsilon \to 0$. □

eorema 3.2. *[3] Considere el sistema 4-prototipo Rossler* (3) *que satis-ıce* $\alpha > 2\beta^3$. *Además se considera los nuevos parámetros* (a, ϵ) *definidos omo sigue* $\alpha = \epsilon(2a - 1 + a^2\epsilon^2)$ *y* $\beta = \epsilon(1 - a)$. *Entonces para* $\epsilon > 0$ *y* $> \frac{1}{2}$ *suficientemente pequeño existe una solución periódica* γ_ϵ *de* (3) *tal ue* $\gamma_\epsilon \to \{z = -\frac{1}{2}\} \cap \{x^2 + (y + z)^2 = \frac{1}{2(2a-1)}\}$ *cuando* $\epsilon \to 0$. *Mas aun* $_\epsilon$ *es asintóticamente estable cuando* $\frac{1}{2} < a < 1$ *e inestable cuando* $a > 1$.

emostración. Desde que $\alpha = \epsilon(2a-1+a^2\epsilon^2)$ y $\beta = \epsilon(1-a)$, si $(\alpha+2\beta)\alpha >$ y ϵ es suficientemente pequeño, entonces el sistema puede ser escrito omo:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -y - z \\ y' & = & x \\ z' & = & \epsilon[(2a - 1 + a^2\epsilon^2)y(1 - y) - (1 - a)z], \end{array}$$

l sistema (3) tiene un punto de equilibrio en

$$(x_e, y_e, z_e) = (0, \frac{a(1 + a\epsilon^2)}{a(2 + a\epsilon^2) - 1}, \frac{a - 1}{a(2 + a\epsilon^2) - 1} - 1)$$

l cual existe para valores suficientemente pequeños de ϵ cuando $a \neq \frac{1}{2}$. El olinomio característico del sistema linealizado en el punto de equilibrio $x_e, y_e, z_e)$ está dado por:

$$p(\lambda) = (a\epsilon - \lambda)(\lambda^2 + \epsilon\lambda + a\epsilon^2 + 1)$$

demás cuando $\epsilon \to 0$ los autovalores asociados al polinomio característico on $0, \pm i$, luego se traslada el punto de equilibrio al origen mediante la ınción $(x, y, z) \to (x - x_e, y - y_e, z - z_e)$ el sistema (3) queda expresado omo

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -y - z \\ y' & = & x \\ z' & = & -\epsilon[(1 + a^2\epsilon^2)y + (1 - a)z + (2a - 1 + a^2\epsilon^2)y^2], \end{array}$$

después del cambio de variable lineal

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la parte lineal en su forma de Jordan está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así el sistema (6) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} X' &= -Y \\ Y' &= X + \epsilon f(X,Y,Z) + O(\epsilon^2) \\ Z' &= \epsilon f(X,Y,Z) + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

con $f(X;Y;Z) = (1-2a)Y^2 + Z(a+Z-2aZ) + Y[2Z(2a-1)-1]$, ahora al realizar el cambio de coordenadas a coordenadas cilínddricas con $X = r\cos\theta$, $Y = r\sin\theta$ y $z = Z$ entonces el sistema sigue como

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon g_1(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \\ \theta' &= 1 + \epsilon g_2(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \\ z' &= \epsilon g_3(\theta,r,z) + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} g_1(\theta,r,z) &= \sin\theta g_3(\theta,r,z) \\ g_2(\theta,r,z) &= \tfrac{\cos\theta}{r} g_3(\theta,r,z) \\ g_3(\theta,r,z) &= z(a+z-2az) + r\sin\theta[2(2a-1)z + r(1-2a)\sin\theta - 1], \end{aligned}$$

además éste sistema está bien definido para $r > 0$. Más aún en esta región para ϵ suficientemente pequeño se tiene que $\theta' > 0$ en una bola grande centrada en el origen, luego se puede reescribir el sistema diferencial como

$$\begin{aligned} \tfrac{dr}{d\theta} &= \epsilon g_1(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \\ \tfrac{dz}{d\theta} &= \epsilon g_3(\theta,r,z) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

tomando *theta* como nueva variable, el sistema (3) es $2\pi-$periódico y están en su forma estándar para aplicar el teorema donde las funciones promedio de g_1 y g_3 con respecto a θ son

$$\begin{aligned} \overline{g}_1(r,z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta,r,z)d\theta &= \frac{1}{2}r(2z(2a-1)-1) \\ \overline{g}_3(r,z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_3(\theta,r,z)d\theta &= \frac{1}{2}[r^2(1-2a) + 2z(a+z-2az)] \end{aligned}$$

el único cero (r^*, z^*) con $r^* > 0$ de la función $(r,z) \to \mathfrak{F}(r,z) = (\overline{g}_1(r,z), \overline{g}_3(r,z))$ es $(r^*, z^*) = (\frac{1}{\sqrt{2(2a-1)}}, \frac{1}{2(2a-1)})$ que existe bajo la condicii¿½n de suponer que $a > \frac{1}{2}$ esta condición implica que $\alpha > \frac{\epsilon^3}{4}$ y $\beta < \frac{\epsilon}{2}$, así la restricción del parámetro inicial sigue, además el jacobiano de $\mathfrak{F}$ en el punto (r^*, z^*) es

$$D\mathfrak{F}(r^*, z^*) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{a-\frac{1}{2}} & a-1 \end{pmatrix}$$

y su determinante es $det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) = a - \frac{1}{2} > 0$ por lo tanto (r^*, z^*) es un cero simple de $\mathfrak{F}$ luego se concluye por el teorema la existencia de una órbita 2π-periódica $\gamma_\epsilon = \{(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ del sistema (3) tal que $(r(\theta, \epsilon), z(\theta, \epsilon)) \to (r^*, z^*))$ cuando $\epsilon \to 0$. Además si se denota por λ_1, λ_2 los autovalores de la matriz $D\mathfrak{F}(r^*, z^*)$ se obtiene que

$$\lambda_1.\lambda_2 = det(D\mathfrak{F}(r^*, z^*)) > 0, \text{ cuando } a > \frac{1}{2}, \text{ traza}(D\mathfrak{F}(r^*, z^*) = a - 1$$

luego la óribta $2\pi-$periódica es asintóticamente estable si $\frac{1}{2} < a < 1$ e inestable cuando $a > 1$ entonces la conclusión del teorema sobre la estabilidad ha sido probada.

Ahora regresando através de los cambios de variable, se tiene que el sistema (3) tiene una órbita periódica $\gamma_\epsilon \to C$ cuando $\epsilon \to 0$ donde C es el circulo dado por $C = \{Z = z^*\} \cap \{X^2 + Y^2 = r^{*2}\}$ la intersección de un plano y un cilindro, finalmente el sistema (3) y por lo tanto el sistema 4-prototipo Rossler tiene una órbita periódica γ_ϵ tal que $\gamma_\epsilon \to \{z = -\frac{1}{2}\} \cap \{x^2 + (y + z)^2 = \frac{1}{2(2a-1)}\}$ cuando $\epsilon \to 0$. □

4. Conclusiones y sugerencias

Luego de nuestro estudio sobre la búsqueda de ciclos límite del sistema 4 prototipo Rössler se tienen las siguientes conclusiones y sugerencias

1. Si el sistema 4-prototipo Rossler (4) que satisface $(\alpha + 2\beta)\alpha > 0$, entonces existe una solución periódica γ_ϵ del sistema tal que $\gamma_\epsilon \to \{z = \frac{1}{2}\} \cap \{x^2 + (y + z)^2 = -\frac{a+2b}{2a}\}$ cuando $\epsilon \to 0$ y γ_ϵ es asintóticamente estable cuando $a + b < 0$ e inestable cuando $a + b > 0$.
2. Si el sistema 4-prototipo Rossler (3) que satisface $\alpha > 2\beta^3$, entonces para $\epsilon > 0$ y $\alpha > \frac{1}{2}$ suficientemente pequeño existe una solución periódica γ_ϵ de del sistema tal que $\gamma_\epsilon \to \{z = -\frac{1}{2}\} \cap \{x^2 + (y + z)^2 = \frac{1}{2(2a-1)}\}$ cuando $\epsilon \to 0$ y γ_ϵ es asintóticamente estable cuando $\frac{1}{2} < a < 1$ e inestable cuando $a > 1$.

Referencias

[1] A. Buică & J. Llibre Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. *Bull. Sci. Math* **128** (2004) 7–22.

[2] J. Mendoza *Sistemas periódicos: perturbación y aplicaciones* Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2013.

[3] I. A. García, J. Llibre, S. Maza *Periodic orbits and their stability in the Rossler prototype-4 system* Physics Letters A.376 2012.

[4] F. Verhulst *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems.* Universitext, Springer-Verlag 1985.